« فراسوی مدیریت»
سال سوم _ شماره ۱۰ _ پائیز ۱۳۸۸
ص ص ۲۳- ۷

ارائه‌ی مدل BCC-DEA برای تعیین مقرون به صرفه بودن شرکت های چند منظوره با داده های فازی

سهند دانشور[۱]
سمیه لایزالی[۲]

چکیده

با پیشرفت علم و تکنولوژی، اهمیت تعیین کارایی و افزایش آن از جمله دغدغه های مهم مدیران و سرمایه گذاران است. ادغام شرکت ها در دنیای واقعی کاملاً رایج است. تصمیم به ادغام شرکت ها جهت افزایش کارایی و بهبود روند تولید و همچنین ادغام چندین شرکت تک منظوره برای ایجاد یک شرکت چند منظوره یکی از مسائل مهم در مدیریت اقتصادی است. در تعیین کارایی ادغام واحدها با روش های پارامتری همانند روش کمترین مربعات و روش رگرسیون تعیین می شد. ولی به دلیل مشکلات زیاد روش های پارامتری، روش های تحلیل پوششی داده ها (DEA) معرفی شدند. تعیین کارایی توسط مدل های مطرح شده در تحلیل پوششی داده ها از روش‌های بسیار پر کاربرد می باشد. این مقاله با مدل DEA مقرون به صرفه بودن ادغام DMUها را برای تشکیل یک DMU چند منظوره با داده‌های فازی و غیر دقیق تعیین می کند. بدین ترتیب در زمینه اقتصادی کمک شایانی به مدیران می کند.

واژه‌های کلیدی:

تحلیل پوششی داده ها، ادغام شرکت ها، شرکت های چند منظوره، داده های فازی، $\alpha-$برش، حالت Best_Worst

---

[۱]- استادیار و عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز (Sahanddaneshvar1@yahoo.com)
[۲]-دانشجوی دانشگاه آزاداسلامی واحد تبریز، باشگاه پژوهشگران جوان،ایران (S.Layazali1@gmail.com)

مقدمه

در اکثر سیستم‌های اقتصادی، تولید انبوه با حداقل ورودی ایده اصلی است. بنابراین مدیران درصدد یافتن یک راه چاره برای تولید حداکثر خروجی با کاهش ورودی هستند، بطوریکه از لحاظ اقتصادی نیز مقرون به صرفه باشد. مواقعی پیش می‌آید که مدیران شرکت‌های تک منظوره که خروجی خاصی را تولید می‌کنند تصمیم به ادغام واحدهای تولیدی خود می‌کنند تا شرکتی چند منظوره برای افزایش کارایی ایجاد نمایند. ولی در مورد اینکه شرکت چند منظوره ادغام یافته، مقرون به صرفه خروجی می‌باشد یا نه اطلاعات کافی ندارند. بنابراین در تصمیم گیری دچار مشکل می‌شوند. ادغام های بزرگ بین بانک‌های عظیم ایالات متحده یا بین خطوط هوایی مثل آمریکا ایر[1] و پیادمونت[2] مثال‌های قابل ذکر در سال‌های اخیر هستند. دلایل بسیاری وجود دارد که چرا شرکت‌ها تصمیم به ادغام می‌گیرند. اما زمانیکه خروجی حاصل از ترکیب ورودی‌ها بزرگتر از ترکیب خروجی‌های تک تک شرکت‌ها باشد، ادغام، کارایی تکنیکی را بهبود می‌بخشد. بحث زبر جمعی تابع هزینه اولین‌بار توسط بایومل[3] (Baumol,1982)، پانزار[4](Panzar,1982) و ویلیگ[5] (Willig, 1982) برای کارایی واحدهای صنعتی در اقتصاد مطرح شده است. اما همانطور که می‌دانیم تابع تولید همواره در دسترس نیست و برای بدست آوردن آن محدودیت‌هایی وجود دارد. بنابراین ارائه مدل DEA برای رسیدن به این هدف ضروری بنظر می‌رسد. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) به عنوان یک ابزار تصمیم گیری توسط چارنز (Charnes et al, 1978, 429-444) معرفی شد. تحلیل پوششی داده‌ها مبنی بر برنامه‌ریزی خطی غیرپارامتری است که کارایی نسبی

---

1 - USAIR
2 - piedmont
3 - baumol
4 - Panzar
5 - Willig

مجموعه واحدهای تصمیم گیرنده‌ی متجانس (DMU) با ورودی و خروجی های چندگانه را اندازه گیری می کند. اهمیت DEA به عنوان ابزار مدیریتی به طور پیوسته زیادتر می‌شود و اندازه گیری اجرایی سازمان‌ها و تصمیمات بنیادی اقتصادی‌معتبرتر می شود. تعریف اندازه کارایی توسط ماندیرتا[۱] (Maindiratta, 1990, 39-56) در DEA مطرح شده است. در این مقاله مدل مطرح شده توسط ری (Ray,2004,187-207) برای تعیین مقرون به صرفه بودن شرکت های چند منظوره مورد مطالعه و بررسی قرار داده شده است. ارزیابی عملکرد فعالیت‌ها یا سازمانها به وسیله مدلهای اساسی DEA نیاز به داده‌های قطعی دارد. از آنجا که در دنیای واقعی با داده‌های غیرقطعی سر و کار داریم، بنابراین داده‌های ورودی و خروجی همواره قطعی نیستند. از اینرو برای سنجش کارایی داده‌های فازی یا نادقیق مدلهای تحلیل پوششی داده‌های فازی معرفی شده است. ارزیابی کارایی DMU با ورودی‌ها و خروجی‌های نادقیق یا فازی به وسیله مدل‌های DEA معمولی مشکل است. چند مدل برای داده‌های فازی توسط محققان مختلف از جمله گیو و تاناکا (Guo & Tanaka, 1998, 517-521) معرفی شده است. روشی برای یافتن توابع عضویت مقادیر کارایی مشاهدات با داده های فازی توسط کااو[۲] و لیو[۳] (Kao & Liu, 2000, 427-437) معرفی شده است.لایزالی(سمیه لایزالی، ۱۳۸۸) در مقاله‌ای تحت عنوان ارائه مدل BCC-DEA تعیین مقرون به صرفه بودن شرکت های چند منظوره، به بررسی مدل BCC در ماهیت خروجی با داده‌های قطعی پرداخته است. خوش فطرت(سحر خوش فطرت، ۱۳۸۶) در پایاننامه خود مدل‌های اساسی DEA فازی را معرفی ومورد بررسی قرار می دهد. در این مقاله مدل DEA برای یافتن کارایی ادغام DMUها با داده های فازی معرفی شده است. علامت مد ~ نشانگر داده های فازی است. این مقاله

---

1 - Maindiratta
2- Kao
3- Liu

بصورت زیر سازمان‌دهی شده است. ابتدا مفاهیم و تعاریف اساسی مربوط به بحث فازی ارائه شده است. سپس در بخش ۳روش $\alpha-$برش توضیح داده شده است. در بخش ۴ مدل ادغام DMU ها با داده‌های غیرقطعی (فازی) ارائه شده است. مدل DEA برای تعیین اقتصادی بودن ادغام شرکت‌های تک منظوره با داده‌های فازی در بخش۵ ارائه شده است. یک مثال عددی که نشانگر روند عملیات است، در بخش ۶ مطرح شده است. در نهایت مقاله با بخش ۷ نتیجه گیری خاتمه می یابد.

مفاهیم و تعریف های اساسی

در این بخش تعاریف و مفاهیمی که لازمه‌ی آشنایی و بکار بردن نظریه‌ی مجموعه‌ی فازی است و در بخش‌های بعدی بکار برده می‌شود را ارائه می‌دهیم.

تعریف مجموعه فازی:

فرض کنید X مجموعه مرجع دلخواه باشد که یک عضو دلخواه آن با x نشان داده می شود. مجموعه فازی A در X تابعی به صورت $A: X \to [0,1]$ است.

غالباً μ_A را بجای تابع A بکار می گیرند یعنی مجموعه‌ی فازی A توسط تابع عضویت آن $\mu_A(x): X \to [0,1]$ مشخص می شود. تابعی که به هر عضو از X عددی را از بازه ی $[0,1]$ به عنوان درجه عضویت آن عضو در مجموعه‌ی فازی A نسبت می دهد و میزان تعلق x به مجموعه A را نشان می دهد.

تعریف مجموعه فازی نرمال:

فرض کنید مجموعه ای فازی A از X باشد. ارتفاع A با $h(A)$ نشان داده می شود که به صورت زیر تعریف می شود:

$$h(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$$

اگر $h(A)=1$ ، آنگاه مجموعه ی فازی A مجموعه ی فازی نرمال و در غیر این صورت، زیر نرمال نامیده می شود. اگر $0<h(A)<1$، آنگاه مجموعه ی فازی زیر نرمال A را می توان نرمال کرد. یعنی با تعریف تابع عضویت $\frac{\mu_A(x)}{h(A)}$ نرمال می شود.

$\alpha-$برش ها:

در این بخش مجموعه های قطعی بنام $\alpha-$ برش ها برای مجموعه ی فازی A معرفی می شود. این مجموعه های قطعی نقش مهمی را در نظریه مجموعه های فازی ایفا می‌کنند، زیرا مجموعه‌ی فازی A از X را می‌توان به وسیله‌ی خانواده ای از این مجموعه های منحصر بفرد نشان داد.

تعریف $\alpha-$ برش: فرض کنید A مجموعه ای فازی از X باشد و $\alpha\in(0,1]$. مجموعه‌ی $\alpha-$برش یک مجموعه‌ی فازی A یک مجموعه‌ی قطعی A_α است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$A_\alpha=\{x\in X,\quad \mu_A(x)\geq\alpha\}$$

اگر در تعریف فوق از نامساوی اکید استفاده شود در آن صورت $\alpha-$برش قوی است و با $A_{\overline{\alpha}}$ نشان داده می شود و به صورت زیر تعریف می شود:

$$A_{\overline{\alpha}}=\{x\in X,\quad \mu_A(x)>\alpha\}$$

تعریف عدد فازی: یک مجموعه ی فازی نرمال محدب مانند A از R (خط حقیقی) را یک عدد فازی (حقیقی) می نامند اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $A(x)$ تک نمایی باشد. یعنی دقیقاً یک $x_0\in R$ وجود داشته باشد که $A(x_0)=1$.

۲. $A(x)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد.

تعریف عدد فازی LR :

عدد فازی A را یک عدد فازی LR می نامند اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x \le m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x \ge m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از R^+ به $[0,1]$ هستند و R(0)=L(0)=1. عدد فازی LR با نماد $(m,\alpha,\beta)_{LR}$ نشان داده می شود. عدد m مقدار میانی یا نمایی و α و β به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست و L و R توابع مرجع نامیده می شوند. از توابع مختلفی برای $L(x)$ و به طور مشابه برای $R(x)$ می توان استفاده کرد.

اعداد فازی مثلثی حالت خاصی از اعداد فازی LR می باشند که در میان اعداد فازی اهمیت خاصی دارند. زیرا به عنوان الگوی مناسبی برای توصیف بسیاری از کمیت های نادقیق تشخیص داده شده اند و محاسبات با آنها ساده تر انجام می شود.

تعریف عدد فازی مثلثی:

عدد فازی A عدد فازی مثلثی نامیده می شود اگر تابع عضویت آن به صورت زیر باشد:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 0 & x<a_l \quad or \quad x>a_u \\ \dfrac{x-a_l}{a-a_l} & a_l\le x\le a \\ \dfrac{a_u-x}{a_u-a} & a\le x\le a_u \end{cases}$$

یک عدد فازی مثلثی با سه تایی مرتب $A=(a_l,a,a_u)$ یا $A=(a,a_l,a_u)$ نمایش داده می شود که در آن a مقدار مرکزی، a_l و a_u به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست آن می باشد. اگر پهنای چپ و راست با هم برابر باشند عدد مثلثی را عدد مثلثی متقارن گویند.

روش $\alpha-$ برش

این روش مدل CCR فازی را به وسیله ی روش برنامه ریزی پارامتری حل می کند. در هر $\alpha-$ برش ورودی‌های فازی و خروجی‌های فازی به بازه های [L,U] تبدیل می شوند. مدل برنامه ریزی خطی بازه ای با بکار بردن این ورودی ها و خروجی ها به وجود می آید. با در نظر گرفتن اولویت های تصمیم گیر چهار روش مختلف برای حل مدل برنامه ریزی خطی با مقادیر بازه ای بدست می آید. این روش ها تعریف کارایی را منعکس می کند (یعنی مینیمم کردن ورودی ها با این شرط که خروجی ها ما کزیمم شود).

روش ۱: روش Best_Best:

با این روش هرDMU از دیدگاه خوش بینانه در نظر گرفته می شود. کمترین یا کوچکترین ورودی ها و بیشترین یا بزرگترین خروجی ها را برای هرDMU از بازه های ورودی و خروجی در هر $\alpha-$ برش بکار می گیرند. این بهترین ترکیب

ممکن برای ورودی ها و خروجی ها ی هر DMU را نشان می دهد. با بکار بردن این روش مدل CCR فازی در هر $\alpha-$ برش به شکل برنامه ریزی خطی زیر در می آید:

$$\begin{aligned}
Max \quad & \varphi_k \\
s.t \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\tilde{Y}_j\right)_\alpha^U \geq \varphi_k \left(\tilde{Y}_k\right)_\alpha^U \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\tilde{X}_j\right)_\alpha^L \leq \left(\tilde{X}_k\right)_\alpha^L \\
& \lambda_j \geq 0 \quad ,(j = 1,2,\dots,n) \\
& \varphi_k \quad free
\end{aligned}$$

روش ۲: روش Best_Worst :

در این روش DMU_0 از دیدگاه خوش بینانه اما بقیه واحدها از دیدگاه بدبینانه در نظر گرفته می شوند. کمترین یا کوچکترین ورودی ها و بیشترین یا کوچکترین خروجی‌ها را برای DMU_0 از بازه‌های ورودی و خروجی در هر $\alpha-$ برش، بکار می گیرند. در حالیکه بیشترین یا بزرگترین ورودی ها و کمترین یا کوچکترین خروجی ها برای بقیه واحدها بکار گرفته می شود. بنابراین با این ورودی ها و خروجی ها DMU_0 بیشترین مقدار کارایی ممکن را در قیاس با بقیه واحد ها خواهد داشت. با بکار بردن این روش مدل CCR فازی در هر $\alpha-$ برش به شکل برنامه ریزی خطی زیر در می آید:

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \varphi_k \\
s.t \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\widetilde{Y}_j\right)_{\alpha}^{L} \geq \varphi_k \left(\widetilde{Y}_k\right)_{\alpha}^{U} \\
& \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\widetilde{X}_j\right)_{\alpha}^{U} \leq \left(\widetilde{X}_k\right)_{\alpha}^{L} \\
& \lambda_j \geq 0 \quad ,(j = 1,2,\dots,n) \\
& \varphi_k \quad free
\end{aligned}
$$

مدل ادغام DMU ها با داده های فازی

با توجه به گسترش سریع و پیچیدگی روزافزون و همچنین رقابت های شدید واحدهای اقتصادی، نیاز به ارائه مدل های ریاضی برای کمک به تصمیمات مدیریتی احساس می‌شود. به وسیله مدل‌ها و فرمول‌های دقیق مربوط به علم تحلیل پوششی داده ها که یکی از ابزارهای مدیریتی است می توان با قطعیت در مورد صحت تصمیمات مدیران اظهار نظر کرد و با قاطعیت آنها را تائید یا رد کرد.

در مورد ادغام واحدهای تصمیم گیرنده نیز مدل هایی ارائه شده است که با توجه به نتایج این مدل ها در مورد ادغام یا عدم ادغام واحدهای اقتصادی و صنعتی می توان تصمیم گرفت.

بکارگیری نظریه مجموعه های فازی به عنوان یک روش مناسب و کارآمد برای تعیین کمیت داده های نادقیق و مبهم در مدل های DEA رواج پیدا کرده است و مزیت استفاده از آن در سال‌های اخیر ثابت شده است. مدل‌های DEA با داده های فازی را مدل های DEA فازی می نامند که مساله های دنیای واقعی را بیشتر از مدل های معمولی DEA نشان می دهند. نظریه مجموعه های فازی بکارگیری داده‌های با احتمالات آماری را در مدل‌های DEA امکان پذیر می کند. مدل های DEA فازی به فرم مدل های برنامه‌ریزی خطی فازی تشکیل می‌شوند.

برای اندازه گیری کارایی ادغام، مدل BCC- DEA در ماهیت خروجی برای داده های فازی در نظر می گیریم و در حالت چند ورودی، یک خروجی بررسی می کنیم. فرض کنیم بردار ورودی $\tilde{X}_j = \left(\tilde{X}_{1j}, \tilde{X}_{2j}, \ldots, \tilde{X}_{nj}\right)$، در αبرشهای مختلف خروجی $\tilde{Y}_j$، $\left(j = 1,2,\ldots,n\right)$را تولید می کند. تصمیم گرفته‌ایم K شرکت از n شرکت را ادغام کنیم. برای تعیین صحت تصمیم خود و اینکه آیا ادغام K شرکت به نفع ما خواهد بود یا نه، گام های زیر را در نظر می گیریم:

گام ۱: ابتدا مساله BCC- DEA در ماهیت خروجی حالت Best_Worst در α برشهای متفاوت برای هر یک از k شرکت حل می کنیم $\left(k = 1,2,\ldots,K\right)$.

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \varphi_k \\
&s.t \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\tilde{Y}_j\right)_\alpha^L \geq \varphi_k \left(\tilde{Y}_k\right)_\alpha^U \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \left(\tilde{X}_j\right)_\alpha^U \leq \left(\tilde{X}_k\right)_\alpha^L \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\qquad \lambda_j \geq 0 \quad ,\left(j = 1,2,\ldots,n\right) \\
&\qquad \varphi_k \quad free
\end{aligned} \tag{1}
$$

از جواب بهینه (۱) مجموعه ورودی، خروجی $\left(\tilde{X}_k^*, \tilde{Y}_k^*\right)$ را بدست می آید که در آن

$$\tilde{Y}_k^* = \varphi_k^* \left(\tilde{Y}_k\right)_\alpha^U + S^+ \tag{2}$$

و

$$\tilde{X}_k^* = \left(\tilde{X}_k\right)_\alpha^L - S^- \tag{3}$$

است. که در آن S^{+} و S^{-} به ترتیب مقادیر کمبود خروجی و هدررفتگی در ورودی است.

گام ۲ : مجموع ورودی ها و خروجی های کارای این K شرکت را به ترتیب با $\widetilde{X}^{T}$ و $\widetilde{Y}^{T}$ نشان می دهیم

$$\widetilde{Y}^{T}=\sum_{k=1}^{K}\widetilde{Y}_{k}^{*} \tag{۴}$$

$$\widetilde{X}^{T}=\sum_{k=1}^{K}\widetilde{X}_{k}^{*} \tag{۵}$$

گام ۳ : مدل BCC- DEA در ماهیت خروجی در حالت Best -Worst برای αبرش‌های مختلف حل می کنیم:

$$\begin{aligned}
Max\quad & \varphi^{T} \\
s.t\quad & \sum_{j=1}^{n}\lambda_{j}\left(\widetilde{Y}_{j}\right)_{\alpha}^{L}\geq\varphi^{T}\widetilde{Y}^{T} \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_{j}\left(\widetilde{X}_{j}\right)_{\alpha}^{U}\leq\widetilde{X}^{T} \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_{j}=1 \\
& \lambda_{j}\geq 0\quad ,(j=1,2,\dots,n) \\
& \varphi^{T}\qquad free
\end{aligned} \tag{۶}$$

جواب بهینه این مدل مقدار کارایی ادغام را نشان می دهد. اگر φ_{*}^{T} بزرگتر از یک باشد ادغام K شرکت مقرون به صرفه است در غیراینصورت بهتر شرکت‌ها را به حال خود رها کنیم و ادغام نکنیم.

حالت خاصی از ادغام، ادغام شرکت‌های تک منظوره و ایجاد یک شرکت چند منظوره است. برای تعیین میزان کارایی و بررسی اینکه از لحاظ اقتصادی ادغام این شرکت‌ها چه تاثیری دارد و آیا مقرون به صرفه می‌باشد یا نه بخش بعدی را ارائه می‌دهیم.

مقرون به صرفه بودن اهداف و کارایی شرکت‌های چند منظوره با داده‌های فازی

در برخی موارد از لحاظ تکنیکی خروجی تولید شده توسط یک شرکت چندمنظوره، خیلی بیشتر از مجموع خروجی های شرکت های شخصی جداگانه است. ادغام شرکت های اختصاصی برای تشکیل یک شرکت چند منظوره انجام می گیرد که باعث مقرون به صرفه بودن اهداف شده است. این مقاله چگونگی استفاده از مدل‌های DEA را برای تشخیص اقتصادی بودن اهداف توضیح می‌دهد.

برای سهولت، حالت دو خروجی و n ورودی را در نظر بگیرید. علاوه بر آن فرض کنید داده های ورودی خروجی از سه گروه شرکت بدست آمده است: A، B و C. شرکت های گروه A تنها خروجی ۱ را تولید می کنند و شرکت های گروه B خروجی ۲ را تولید می کنند و شرکت های گروه C هر دو خروجی را تولید می کنند. مجموعه خروجی های شرکت های اختصاصی را می توان بصورت $\tilde{y}^A = \left(\tilde{y}_{1j}^A, 0\right)$ و $\tilde{y}^B = \left(0, \tilde{y}_{2j}^B\right)$ بیان کرد. مجموعه خروجی شرکت چندمنظوره $\tilde{y}^C = \left(\tilde{y}_{1j}^C, \tilde{y}_{2j}^C\right)$ می‌باشد. فرض کنید که شرکت‌های همه گروه‌ها همه ورودی‌ها را بکار می برند. بنابراین مجموعه ورودی های آنها اختصاصی نیستند. دو شرکت یکی از نوع A و دیگری از نوع B در نظر بگیرید. فرض کنید مجموعه ورودی– خروجی آنها بصورت زیر باشد:

برای شرکت های گروه A داریم:

$$\tilde{y}_0^A = \left(\tilde{y}_{1j}^A, 0\right) \quad \text{و} \quad \tilde{x}_0^A = \left(\tilde{x}_{10}^A, \tilde{x}_{20}^A, \ldots, \tilde{x}_{n0}^A\right)$$

برای شرکت های گروه B داریم:

$$\tilde{y}_0^B = \left(0, \tilde{y}_{20}^B\right) \quad \text{و} \quad \tilde{x}_0^B = \left(\tilde{x}_{10}^B, \tilde{x}_{20}^B, \ldots, \tilde{x}_{n0}^B\right)$$

تعریف می کنیم:

$$\tilde{x}_0^{*B} = \theta_0^{*B}\tilde{x}_0^B - S_0^{*B} \quad , \quad \tilde{x}_0^{*A} = \theta_0^{*A}\tilde{x}_0^A - S_0^{*A} \quad ,$$
$$\tilde{y}_0^{AB} = \tilde{y}_0^A + \tilde{y}_0^B \qquad \tilde{x}_*^{AB} = \tilde{x}_0^{*A} + \tilde{x}_0^{*B} \quad ,$$

در اینجا بردارهای S_0^{*A} و S_0^{*B} متغیرهای کمکی مجموعه ورودی های شرکت‌های اختصاصی هستند.

مجموعه ورودی های کارا $\tilde{x}_0^{*A}$ و $\tilde{x}_0^{*B}$ از جواب بهینه مدل BCC در ماهیت ورودی برای α- برش های مختلف در حالت Best_Worst زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}
\theta_0^{*A} &= \min \theta \\
s.t.\quad & \sum_{j\in A} \lambda_j^A \left(y_{1j}^A\right)_\alpha^L + \sum_{j\in C} \lambda_j^C \left(y_{1j}^C\right)_\alpha^L \ge \left(y_{10}^A\right)_\alpha^U; \\
& \sum_{j\in A} \lambda_j^A \left(x_j^A\right)_\alpha^U + \sum_{j\in C} \lambda_j^C \left(x_j^C\right)_\alpha^U - S_0^A = \theta \left(x_0^A\right)_\alpha^L; \\
& \sum_{j\in A} \lambda_j^A + \sum_{j\in C} \lambda_j^C = 1; \\
& S_0^A \ge 0;\ \lambda_j^A,\ \lambda_j^C \ge 0
\end{aligned} \tag{۷}$$

و

$$\begin{aligned}
\theta_0^{*B} &= \min \theta \\
s.t.\quad & \sum_{j\in A} \lambda_j^B \left(y_{2j}^B\right)_\alpha^L + \sum_{j\in C} \lambda_j^C \left(y_{2j}^C\right)_\alpha^L \ge \left(y_{20}^B\right)_\alpha^U; \\
& \sum_{j\in B} \lambda_j^B \left(x_j^B\right)_\alpha^U + \sum_{j\in C} \lambda_j^C \left(x_j^C\right)_\alpha^U - S_0^B = \theta \left(x_0^B\right)_\alpha^L; \\
& \sum_{j\in B} \lambda_j^B + \sum_{j\in C} \lambda_j^C = 1; \\
& S_0^B \ge 0;\ \lambda_j^B,\ \lambda_j^C \ge 0
\end{aligned} \tag{۸}$$

مجموعه ورودی شرکت چند منظوره شده می تواند بصورت زیر تعیین شود:

$$\begin{aligned}
V\left(\tilde{y}_0^{AB}\right) = \Big\{ \tilde{x} : & \sum_{j\in A} \lambda_j^A \tilde{x}_j^A + \sum_{j\in B} \lambda_j^B \tilde{x}_j^B + \sum_{j\in C} \lambda_j^C \tilde{x}_j^C \le \tilde{x}; \\
& \sum_{j\in A} \lambda_j^A \tilde{y}_j^A + \sum_{j\in} \lambda_j^B \tilde{y}_j^B + \sum_{j\in} \lambda_j^C \tilde{y}_j^C \ge \tilde{y}_0^{AB}; \\
& \sum_{j\in A} \lambda_j^A + \sum_{j\in B} \lambda_j^B + \sum_{j\in C} \lambda_j^C = 1;\ \lambda_j^A, \lambda_j^B, \lambda_j^C \ge 0 \Big\}
\end{aligned} \tag{۹}$$

اگر $\exists\, \tilde{x} \in V\left(\tilde{y}_0^{AB}\right) : \tilde{x} \le \tilde{x}_*^{AB}$ مقرون به صرفه بودن اهداف مثبت است.

مثال عددی

حال با یک مثال روند عملیاتی مقاله را توضیح می دهیم. داده های فازی مثلثی متقارن مربوط به ۳ بانک با دو ورودی و دو خروجی در جدول زیر داده شده است، که در آن بانک A خروجی نوع اول را تولید می کند، بانک B خروجی نوع دوم را تولید می کند و بانک C هر دو نوع خروجی را تولید می کند.

جدول (۱)- داده های فازی مربوط به بانک A، B و C

	A	B	C
ورودی اول	$(0.3533, 0.03)$	$(0.2, 0.02)$	$(0.5333, 0.03)$
ورودی دوم	$(0.3389, 0.02)$	$(0.6876, 0.03)$	$(0.7699, 0.04)$
خروجی اول	$(0.0331, 0.02)$	0	$(0.3803, 0.02)$
خروجی دوم	0	$(0.1, 0.01)$	$(0.3533, 0.01)$

داده‌های فازی را با αهای مختلف برش داده و داده‌ها پس از برش دادن به بازه‌های $[L, U]$ تبدیل می‌شوند. جواب‌های حاصل از حل مدل های (۷) و (۸) برای α- برش های $\alpha = 0.2, \alpha = 0.5, \alpha = 1$ در جدول زیر آمده است:

جدول (۲)

α- برش	θ_0^{*A}	θ_0^{*B}	S_0^{*A}	S_0^{*B}	x_0^{*A}	x_0^{*B}
0.2	1.183	1.7238	(0,0.0491,0.0076,0,0)	(0.108,0,0,0.8267,0)	(0.3821,0.3821)	(0.3171,0.3172)
0.5	1.131	1.6101	(0,0.043,0.0106,0,0)	(0.105,0,0,0.7771,0)	(0.372,0.372)	(0.3059,0.3058)
1	1.042	1.4382	(0,0.0331,0.015,0,0)	(0.1,0,0,0.7013,0)	(0.0218,0.020[illegible])	(0.2876,0.2876)

با توجه به مقادیر به دست آمده برای α- برش های $\alpha = 0.2, \alpha = 0.5, \alpha = 1$ می توان نوشت:

جدول (۳)

α- برش	0.2	0.5	1
x_*^{AB}	$(0.6993, 0.6933)$	$(0.6780, 0.6778)$	$(0.3094, 0.3079)$
y_0^{AB}	$(0.0491, 0.108)$	$(0.043, 0.105)$	$(0.0331, 0.1)$

با حل مدل (۹) برای α- برش های $\alpha = 0.2, \alpha = 0.5, \alpha = 1$ برای $\left(\tilde{x}_1 = (0.29, 0.01), \tilde{x}_2 = (0.29, 0.01)\right)$ نتایج زیر به دست می آید:

جدول (٤)

α-برش	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
0.2	0	0	0.6987	0	0.3013	0
0.5	0	0	0.7106	0	0.2894	0
1	0	0	0.73	0	0.27	0

مشاهده می کنیم که $\exists\, \tilde{x} \in V\left(\tilde{y}_0^{AB}\right) : \tilde{x} \le \tilde{x}_*^{AB}$ بنابراین ورودی در مجموعه $V\left(\tilde{y}_0^{AB}\right)$ یافت شد که که کمتر از ورودی‌های مورد نظر را مصرف می‌کند.

بنابراین از نظر اقتصادی بهتر است تصمیم به تاسیس شرکت دو منظوره حاصل از ادغام دو شرکت A و B گرفته شود به رقیبی برای شرکت دو منظوره C تبدیل شود.

جمع بندی و نتیجه گیری

در این مقاله برای تولید بهینه با حداقل هزینه الگوریتمی تحت عنوان مقرون به صرفه بودن شرکت های چند منظوره ارائه شده است. مزیت این روش این است که با حل مدل های مطرح شده به راحتی می توان تصمیم گرفت که آیا برای افزایش کارایی بهتر است یک شرکت چند منظوره ایجاد کنیم یا با یک شرکت مستقل چند منظوره به طور جداگانه وارد مذاکره شده و با آن همکاری کنیم. مدیران دیگر دغدغه ی این را نخواهند داشت که آیا تصمیم آنها در مورد ادغام واحد تولیدی تک منظوره و ایجاد یک شرکت چند منظوره درست بوده است یا نه؟

منابع :

- لایزالی، سمیه (۱۳۸۸) " ارائه مدل BCC-DEA برای تعیین مقرون به صرفه بودن شرکت های چند منظوره"، مجموعه مقالات دومین کنفرانس بین المللی تحقیق در عملیات، بابلسر.
- خوش فطرت، سحر (۱۳۸۶) " تعیین کارایی واحدهای تصمیم گیرنده واقع بر مرزهای ضعیف در مدل های اساسی DEA فازی .

- Baumol, W. J., J. C. Panzar, and R. D. Willig (1982), Contestable Markets and the Theory of Industry Structure. New York: Harcourt Brace Jovanovich.
- Charnes A, Cooper W.W, Rhodes E, (1978), Measuring the efficiency of Decision
- Making Units, European Journal of Operational Research 2(6), 429-444.
- Maindiratta, A.(1990), Largest Size-Efficient Scale and Size Efficiencies of Decision-Making Units in Data Envelopment Analysis, Journal of Econometrics 46, 39_56.
- Ray, S. C., (2004), Data Envelopment Analysis Theory and Techniques for Economics and Operations Research, New York.
- Guo, P., & Tanaka, H.(1998),Extended fuzzy DEA, in: Proceedings of the 3rd Asian Fuzzy Systems Symposium,517–521.
- Guo, P., & Tanaka, H.(2001), Fuzzy DEA: a perceptual evaluation method, Fuzzy Sets and Systems, 119, 149-160.
- Kao, C., & Liu, S. T.(2000), Fuzzy Efficiency Measures in Data envelopment Analysis, Fuzzy Sets and Systems, 113, 427-437.