« فراسوی مدیریت»
سال چهارم ـ شماره۱۴ـ پائیز ۱۳۸۹
ص ص ۱۳۰- ۱۰۹

کمترین نسبت هزینه – سود برای داده‌های بازه‌ای

دکتر سهند دانشور[۱]
مژگان منصوری کلیبر[۲]

چکیده

در این مقاله مسائل محاسبه حداکثر و حداقل سهم افراد یا سازمان‌ها جهت محاسبه سود و هزینه‌ی تخصیص یافته به بازیکنان با معیارهای متعدد بررسی و مورد بحث قرار می‌گیرد.با این فرض که بازیکنان خودخواه باشند و نمره‌ی هر معیار برای هر بازیکن یک بازه فرض شده است. هر بازیکن سعی می‌کند بهترین وضعیت را برای خود فراهم کند. در این مقاله طرحی جدید برای محاسبه‌ی کمترین نسبت هزینه – سود برای داده‌های بازه‌ای پیشنهاد شده است. هربازیکنی که کمترین نسبت هزینه – سود را به خود اختصاص دهد موفق‌ترین بازیکن در کسب سود و هزینه مطلوب می‌باشد. همچنین طرح توسعه یافته در این مقاله روشی برای شناسایی موفق‌ترین بازیکنان و ائتلاف‌ها ارائه می‌نماید.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، روش ناحیه اطمینان، نظریه بازی

[۱]- استادیار و عضو هیات علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز(sahanddaneshvar1@yahoo.com)
[۲]- عضو باشگاه پژوهشگران جوان دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز (mozhganmansouri953@gmail.com)

۱.مقدمه

فرض کنید n بازیکن و هر کدام از بازیکنان دارای m معیار برای ارزیابی قابلیت یا توانایی می‌باشند، که با یک عدد مثبت برای هر معیار نمایش داده می‌شود. همان طورکه در امتحانات کلاسی رایج است هر اندازه نمره یک معیار بالاتر باشد به همان اندازه این بازیکن برای اجرا در آن معیار مورد قضاوت بهتری قرار می گیرد.

برای مثال، فرض کنید بازیکنان ۳ دانش‌آموز باشند A ، B و C با ۳ معیار ریاضیات، ادبیات و ژیمناستیک، که نمره‌های هر ۳ موضوع به صورت بازه فرض شده است. حال می‌خواهیم مقدار خاصی بورسیه به این ۳ دانش‌آموز با توجه به نمراتشان در این ۳ موضوع تخصیص دهیم. فرض کنید همه بازیکنان خودخواه باشند. بدان معنی که آنها در برتری خودشان در نمره‌هایشان اصرار می کنند. به هر حال بازیکنان باید در مورد تخصیص بورسیه به توافق برسند. شرایط مشابهی در اکثر مسائل اجتماعی وجود دارد. این مقاله با استفاره از تخصیص سود و هزینه (Jahanshahloo & et al, 2006) و(Nakabayashi &Tone, 2006) روشی جدید برای محاسبه‌ی کمترین نسبت هزینه – سود برای داده‌های بازه‌ای برای بازیکنان تحت چهارچوب نظریه بازی و تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) پیشنهاد می کند.

۲.مدل پایه بازی

در این بخش مدل‌های پایه و ساختارهای بازی را معرفی کرده و ویژگی‌های ریاضی بازی را بیان می کنیم.

۲-۱- رفتار خودخواهانه و تردید در عمل منتسب به اعتقاد خود

فرض کنید $[x_{ij}^{l}, x_{ij}^{u}]$ ماتریس نمره باشد، نمره بازیکن jدرمعیار i، برای $i=1,\dots,m$ و $j=1,\dots,n$ با این فرض که هر اندزه نمره یک معیار بیشتر باشد

به همان اندازه بازیکن با توجه به آن معیار به عنوان کسی که عملکرد بهتری داشته مورد قضاوت قرار می‌گیرد. هر بازیکن، k امکان برای انتخاب دو مجموعه از وزن‌های نامنفی $w^k = (w_1^k, ..., w_m^k)$ در ارتباط با آن معیارهایی دارد که برای آن بازیکن از بالاترین ارجحیت برخوردار است. با استفاده از وزن w^k، نمره نسبی بازیکن k ام به کل نمره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}^l}{\sum_{i=1}^{m} w_i^k (\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^l + x_{ij}^u))}, \qquad \frac{\sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}^u}{\sum_{i=1}^{m} w_i^k (\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^l + x_{ij}^u))} \quad (۱)$$

کسرهای فوق نشان‌گر این می باشند که نمره کل همه بازیکنان با گزینه وزنی بازیکن k سنجیده می‌شود. بنابراین عبارت (۱) اهمیت نسبی پایین و بالای سهم بازیکن k را تحت گزینه وزنی w^k نشان می‌دهد. بازیکن k ام می‌خواهد این نسبت را با انتخاب ارجح‌ترین وزن بیشینه کند، لذا این امر منجر به برنامه‌ریزی های کسری زیر خواهد شد:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} \dfrac{\sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}^l}{\sum_{i=1}^{m} w_i^k (\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^l + x_{ij}^u))}, & \text{Max} \dfrac{\sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}^u}{\sum_{i=1}^{m} w_i^k (\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^l + x_{ij}^u))} \\ \text{s.t} \quad w_i^k \geq 0 \quad \forall i & \text{s.t} \quad w_i^k \geq 0 \quad \forall i \end{array}$$

(۲)

مساله را به شکل زیر بدون از دست دادن کلیت فرمول بندی می کنیم. مجموعه داده های X نرمال سازی می شود(به طور سطری نرمال می شود).

$$\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^l + x_{ij}^u) = 1 \quad , \quad (\forall i)$$

برای این کار، سطر x_{ij}^{l} و x_{ij}^{u} به مجموع سطر $\sum_{j=1}^{n}(x_{ij}^{l}+x_{ij}^{u})$ برای $i=1,...,m$ تقسیم می‌شود. برنامه (۲) از این عملیات متأثر نمی‌شود. بنابراین با استفاده از طرح تبدیل چارنز- کوپر[1] برنامه های کسری (۲) می‌تواند با استفاده از برنامه‌ریزی های خطی زیر بیان شود:

$$c^{l}(k)=Max\sum_{i=1}^{m}w_{i}^{k}x_{ik}^{l}$$

$$s.t\quad \sum_{i=1}^{m}w_{i}^{k}=1\ ,\ w_{i}^{k}\geq 0(i=1,...,m) \qquad (۳)$$

$$c^{u}(k)=Max\sum_{i=1}^{m}w_{i}^{k}x_{ik}^{u}$$

$$s.t\quad \sum_{i=1}^{m}w_{i}^{k}=1\ ,\ w_{i}^{k}\geq 0(i=1,...,m) \qquad (۴)$$

حال مسأله، ماکزیمم‌سازی تابع هدف (۳)و(۴) روی سیمپلکس $\sum_{i=1}^{m}w_{i}^{k}=1$ می‌باشد. آشکار است که جواب بهینه با اختصاص ۱ به وزن $w_{i(k)}^{k}$ و $w_{i(k')}^{k}$ برای معیار $i(k)$ و $i(k')$ طوری که $x_{i(k')}^{u}=\mathrm{Max}\{x_{ik}^{u}\mid i=1,...,m\}$ و $x_{i(k)}^{l}=\mathrm{Max}\{x_{ik}^{l}\mid i=1,...,m\}$ و با تخصیص صفر به وزن معیارهای باقی‌مانده بدست می‌آید. بنابراین جواب بهینه به صورت زیر خواهد بود:

$$c^{u}(k)=x_{i(k)}^{u} \text{ و } c^{l}(k)=x_{i(k)}^{l} \qquad k=1,...,n$$

[1]. Charnes-Cooper

$c^l(k)+c^u(k)$ بیشترین نمره ی نسبی بازیکن k را نشان می‌دهد که از طریق رفتار انتخاب وزن بهینه بدست می‌آید. وزن بهینه $w_{i(k)}^{k}$ و $w_{i(k')}^{k}$ ممکن است از یک بازیکن به دیگری متفاوت باشد.

قضیه ۱:

$$\sum_{k=1}^{n}(c^l(k)+c^u(k))\geq 1$$

برهان: فرض کنید وزن بهینه بازیکن k، $w_{\mathrm{k}}^{l*}=(w_{1k}^{l*},...,w_{mk}^{l*})$ و $w_{i(k)k}^{l*}=1$ و $w_{i(k)}^{l*}=\circ,\ (\forall i\neq i(k))$ باشد و $w_{\mathrm{k}}^{u*}=(w_{1k}^{u*},...,w_{mk}^{u*})$ و $w_{i(k)k}^{u*}=1$ و $w_{i(k)}^{u*}=\circ,\ (\forall i\neq i(k'))$ در این صورت

$$\sum_{k=1}^{n}c^l(k)+c^u(k)=\sum_{k=1}^{\mathrm{n}}c^l(k)+\sum_{k=1}^{n}c^u(k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}w_{ik}^{l*}x_{ik}^{l}+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}w_{ik}^{u*}x_{ik}^{u}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}x_{i(k)k}^{l}+\sum_{k=1}^{n}x_{i(k)k}^{u}\geq\sum_{k=1}^{n}x_{1k}^{l}+\sum_{k=1}^{n}x_{1k}^{u}=1$$

نامساوی فوق از $x_{i(k)k}^{l}\geq x_{1k}^{l}$ و $x_{i(k)k}^{u}\geq x_{1k}^{u}$ و تساوی آخر از نرمال‌سازی سطری حاصل شدند.

این قضیه ثابت می‌کند، که اگر هر بازیکنی در تقسیم منتسب به اعتقاد خود اصرار کند و در بدست آوردن بخشی از سود تخصیص داده شده از طریق $c^l(k),c^u(k)$ پافشاری کند، مجموع سهم‌ها معمولاً از ۱ تجاوز می‌کند بنابراین $c^l(k)+c^u(k)$ نمی‌تواند نقش تقسیم سود را تمام کند. در نهایت اگر مجموع $c^l(k),c^u(k)$ ،۱ باشد در این صورت همه بازیکنان با پذیرفتن تقسیم $c^l(k)+c^u(k)$ موافق خواهند بود، چون از طریق ارجح‌ترین گزینه وزنی

بازیکنان بدست می‌آید. مورد اخیر در صورتی اتفاق خواهد افتاد که همه بازیکنـان وزن انتخابی بهینه عادی و یکسان داشته باشند.

قضیه ۲: تساوی $\sum_{k=1}^{n} c^{l}(k)+c^{u}(k)=1$ برقرار است اگر و فقط اگـر مـاتریس نمره در شرایط زیر صدق کند.

$$x^{l}_{1k}=x^{l}_{2k}=\ldots=x^{l}_{mk}$$ ،$k=1,\ldots,n$

و $x^{u}_{1k}=x^{u}_{2k}=\ldots=x^{u}_{mk}$

یعنی، هر بازیکن دارای همان امتیاز با توجه به معیار m خواهد بود.

برهان: چون $c^{l}(k)=x^{l}_{1k}$ و $c^{u}(k)=x^{u}_{1k}$ برای همه k ها،

$$\sum_{k=1}^{n} c^{l}(k)+c^{u}(k)=\sum_{k=1}^{n} c^{l}(k)+\sum_{k=1}^{n} c^{u}(k)=\sum_{k=1}^{n} x^{l}_{1k}+\sum_{k=1}^{n} x^{u}_{1k}=1.$$

بـرعکس: فـرض کنیـد $x^{l}_{11}>x^{l}_{21}$ و $x^{u}_{11}>x^{u}_{21}$ پـس بایـد سـتون $h\neq 1$ و $h'\neq 1$وجود داشته باشد که $x^{l}_{1h}<x^{l}_{2h}$ و $x^{u}_{1h'}<x^{u}_{2h'}$ وگرنـه مجمـوع سـطر دوم نمی‌تواند به ۱ برسد. پس:

$$c^{l}(1)\geq x^{l}_{11} \text{ و } c^{u}(1)\geq x^{u}_{11}$$
$$c^{l}(h)\geq x^{l}_{2h}\geq x^{l}_{1h} \text{ و } c^{u}(h)\geq x^{u}_{2h}\geq x^{u}_{1h}$$
$$c^{l}(j)\geq x^{l}_{1j}\ (\forall j\neq 1,h) \text{ و } c^{u}(j)\geq x^{u}_{1j}\ (\forall j\neq 1,h')$$

پس:

$$\sum_{k=1}^{n} c^l(k)+c^u(k) = \sum_{k=1}^{n} c^l(k)+\sum_{k=1}^{n} c^u(k) \geq$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq h}}^{n} x_{1j}^l + x_{2h}^l + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq h'}}^{n} x_{2j}^u + x_{2h'}^u > \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^l + \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^u = 1$$

که منجر به تناقض می‌شود. لذا بازیکن باید در همه معیارها نمره یکسان داشته باشد. همچنین رابطه یکسانی برای بازیکنان دیگر نیز برقرار باشد.

در مورد فوق، فقط یک معیار برای توصیف بازی و تقسیم متناسب به این نمره که یک تقسیم عادلانه می‌باشد لازم است. به هر حال ممکن است این شرایط در موارد نادری اتفاق افتد. در اکثر موارد $\sum_{k=1}^{n} c^l(k)+c^u(k) > 1$.

۲-۲-ائتلاف با ویژگی جمعی

فرض کنید ائتلاف S یک زیرمجموعه از بازیکنان $N=(1,...,n)$ باشد. سابقه هر ائتلاف S به صورت عبارت زیر تعریف می‌شود.

$$x_i^l(S) = \sum_{j\in S} x_{ij}^l \ , \ x_i^u(S) = \sum_{j\in S} x_{ij}^u \ , \ i=1,...,m \qquad (5)$$

هدف این ائتلاف رسیدن به حاصل ماکزیمم $c^l(S), c^u(S)$ می‌باشد.

$$c^l(S) = Max \sum_{i=1}^{m} w_i x_i^l(S),$$
$$s.t \ \sum_{i=1}^{m} w_i = 1, w_i \geq 0 (i=1,...,m) \qquad (۶)$$

$$c^u(S) = Max \sum_{i=1}^{m} w_i x_i^u(S),$$
$$s.t \ \sum_{i=1}^{m} w_i = 1, w_i \geq 0 (i=1,...,m) \qquad (۷)$$

c^l (S) و c^u (S) بـا $\mathrm{c}^l(\phi)$ و $\mathrm{c}^u(\phi)$، تـابع مشخـصه ائـتلاف تعریـف می‌شود. بنابراین، بازی‌ای خواهیم داشت به شکل ائتلافی با سود قابل انتقال کـه بـا (N,c) نمایش داده می‌شود.

تعریف۱ : تابع f زیر- جمعی است، اگر به ازای $S \subset N$ و $T \subset N$ با $S \cap T = \phi$، عبارت $f(S \cup T) \le f(S) + f(T)$ برقرار باشد.

تعریف ۲: تابع f زبر- جمعی است، اگر به ازای $S \subset N$ و $T \subset N$ با $S \cap T = \phi$، عبارت $f(S \cup T) \ge f(S) + f(T)$ برقرار باشد.

قضیه ۳: تابع مشخصه c، زیر- جمعی است، یعنی به ازای $S \subset N$ و $T \subset N$ با $S \cap T = \phi$ داریم:

$$c^l(S \cup T) + c^u(S \cup T) \le c^l(S) + c^l(T) + c^u(S) + c^u(T)$$

برهان: با تجدید شماره‌گذاری انـدیس‌هـا مـی‌تـوان فـرض کـرد کـه $S = \{1,\ldots,h\}$، $T = \{h+1,\ldots,k\}$ و $S \cup T = \{1,\ldots,k\}$ برای این مجموعه‌ها:

$$c^l(S \cup T) + c^u(S \cup T) = \underset{i}{Max} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}^{l} + \underset{i}{Max} \sum_{j=1}^{k} x_{ij}^{u}$$
$$\le \underset{i}{Max} \sum_{j=1}^{h} x_{ij}^{l} + \underset{i}{Max} \sum_{j=h+1}^{k} x_{ij}^{l} + \underset{i}{Max} \sum_{j=1}^{h} x_{ij}^{u} + \underset{i}{Max} \sum_{j=h+1}^{k} x_{ij}^{u} \; .$$
$$= c^l(S) + c^l(T) + c^u(S) + c^u(T)$$

همچنین قضیه زیر را داریم:

قضیه ۴: بالاترین نمره نسبی همه بازیکنان برابر یک است، $c^l(N) + c^u(N) = 1$.

$$c^l(N) + c^u(N) = \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{l} + \sum_{i=1}^{m} w_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^{u} = \sum_{i=1}^{m} w_i \left(\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^{l} + x_{ij}^{u}) \right) = \sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

۲-۳- بازی مینیمم DEA

در این بخش طرف مقابل بازی خودخواهانه (N,c) مشاهده می‌شود که با جایگزینی Max در(۱) با Min به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d^l(k)=Min\sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}^l$$
$$s.t \quad \sum_{i=1}^{m} w_i^k=1\ ,\ w_i^k\geq 0(i=1,...,m) \qquad (۸)$$
$$d^u(k)=Min\sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}^u$$
$$s.t \quad \sum_{i=1}^{m} w_i^k=1\ ,\ w_i^k\geq 0(i=1,...,m) \qquad (۹)$$

مقـدار بهینـه $d^l(k)+d^u(k)$ کمتـرین نمـره نـسبی بـازیکن k را نـشان می‌دهد، در این مورد، به عنوان نقطه مقابل قضیه (۱) داریم:

قضیه ۵: $$\sum_{k=1}^{n}(d^l(k)+d^u(k))\leq 1$$

برهان: فرض کنید وزن بهینه بازیکن k، $w_k^{l*}=(w_{1k}^{l*},...,w_{mk}^{l*})$ و $w_{i(k)}^{l*}=\circ,\ (\forall i\neq i(k))\ w_{i(k)k}^{l*}=1$ باشد و $w_k^{u*}=(w_{1k}^{u*},...,w_{mk}^{u*})$ و $w_{i(k)}^{u*}=\circ,\ (\forall i\neq i(k'))\ w_{i(k)k}^{u*}=1$ در این صورت

$$\sum_{k=1}^{n} d^l(k)+d^u(k)=\sum_{k=1}^{\mathrm{n}} d^l(k)+\sum_{k=1}^{n} d^u(k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{ik}^{l*}x_{ik}^l+\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{ik}^{u*}x_{ik}^u$$
$$=\sum_{k=1}^{n} x_{i(k)k}^l+\sum_{k=1}^{n} x_{i(k)k}^u\leq\sum_{k=1}^{n} x_{1k}^l+\sum_{k=1}^{n} x_{1k}^u=1$$

نامساوی فوق از $x^{l}_{i(k)k} \le x^{l}_{1k}$ و $x^{u}_{i(k)k} \le x^{u}_{1k}$ و تساوی آخر از نرمال‌سازی سطری حاصل شدند.

نظیر مورد بازی Max، برای ائتلاف $S \subset N$:

$$d^{l}(S) = Min \sum_{i=1}^{m} w_i x_i^{l}(S), \quad s.t \ \sum_{i=1}^{m} w_i = 1 \ , \ w_i \ge 0 (i = 1,...,m) \qquad (۱۰)$$

$$d^{u}(S) = Min \sum_{i=1}^{m} w_i x_i^{u}(S), \quad s.t \ \sum_{i=1}^{m} w_i = 1 \ , \ w_i \ge 0 (i = 1,...,m) \qquad (۱۱)$$

بدیهی است $d^{l}(N) + d^{u}(N) = 1$. بازی مینیمم DEA با (N,d) نمایش داده می‌شود (N,d) زیر- جمعی می‌باشد. لذا این بازی با $d^{l}(k) > ۰$ و $d^{u}(k) > ۰$ $(k = 1,...,n)$ شروع شده و از طریق ائتلاف مادامی که بیشترین ائتلاف $d^{l}(N) + d^{u}(N) = 1$ بدست آید به بیشترین سود می‌رسد.

میان بازی‌های (N,c) و (N,d) قضیه زیر را داریم:

قضیه ۶: $\forall S \underset{\neq}{\subset} N \quad d^{l}(S) + d^{u}(S) + c^{l}(N/S) + c^{u}(N/S) = 1$

برهان: با تجدید شماره‌گذاری اندیس‌ها می‌توان فرض کرد $S = \{1,...,h\}$ و $N = \{1,...,n\}$ و $N/S = \{h+1,...,n\}$. برای این مجموعه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}
&d^l(S)+d^u(S)+c^l(N/S)+c^u(N/S)\\
&=\underset{i}{Min}\sum_{j=1}^{h}x_{ij}^{l}+\sum_{j=1}^{h}x_{ij}^{u}+\underset{i}{Max}\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{l}+\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{u}\\
&=\underset{i}{Min}\left((\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{l}+\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^{u})-(\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{l}+\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{u})\right)+\underset{i}{Max}\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{l}+\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{u}\\
&=\underset{i}{Min}\left(1-(\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{l}+\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{u})\right)+\underset{i}{Max}\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{l}+\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{u}\\
&=1-\underset{i}{Max}\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{l}-\underset{i}{Max}\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{u}+\underset{i}{Max}\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{l}+\underset{i}{Max}\sum_{j=h+1}^{n}x_{ij}^{u}=1
\end{aligned}$$

پس نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱: (N,c) و (N,d) بازی‌های دوگان می‌باشند.

۳-توسیع مدل پایه

در این بخش مدل پایه را به بازی کمترین نسبت هزینه- سود برای داده های بازه ای گسترش می‌دهیم.

۳-۱-کمترین نسبت هزینه- سود

فرض کنید s معیار برای نمایش سودها و m معیار برای نمایش هزینه‌ها وجود دارد و $[x_{ij}^{l},x_{ij}^{u}](i=1,...,m)$ و $[y_{ij}^{l},y_{ij}^{u}](i=1,...,s)$ به ترتیب سودها و هزینه‌های بازیکن j $(j=1,...,n)$ و $u=(u_1,...,u_s)$ و $v=(v_1,...,v_m)$ وزن‌های مجازی سودها و هزینه‌ها برای بازیکن jام باشند. مانند عبارت (۱) نسبت هزینه – سود به صورت عبارت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}^{l}}{\sum_{i=1}^{s}u_i y_{ij}^{l}},\frac{\sum_{i=1}^{m}v_i x_{ij}^{u}}{\sum_{i=1}^{s}u_i y_{ij}^{u}} \qquad (۱۲)$$

هر بازیکنی می‌خواهد نسبت هزینه- سود متناظر خود را کاهش دهد یعنی می‌خواهد بهترین شرایط را برای خود فراهم کند. با این شرط که وزن متناظر سودها و هزینه‌ها نامنفی است. این شرایط را با برنامه‌ریزی خطی زیر می‌توان بیان کرد:

$$\begin{aligned}
& d^{l}(j) = Min \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l} \\
& s.t \quad \sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^{l} = 1 \ , \ \sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^{l} \geq 0 \ (j = 1,\dots,n) \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l} \geq 0 \ (j = 1,\dots,n) \ , \ u_i , v_i \geq 0 \ \forall i \qquad (۱۳)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d^{u}(j) = Min \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{u} \\
& s.t \quad \sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^{u} = 1 \ , \ \sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^{u} \geq 0 \quad (j = 1,\dots,n) \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{u} \geq 0 \ (j = 1,\dots,n) \ , \ u_i , v_i \geq 0 \ \forall i \qquad (۱۴)
\end{aligned}$$

قضیه ۷: $\sum_{k=1}^{n} (d^{l}(j) + d^{u}(j)) \leq 1$

برهــان: فــرض کنیــد وزن بهینــه بــازیکن j ، $w_{j}^{l*} = (w_{1j}^{l*},\dots,w_{mj}^{l*})$ و $w_{i(j)}^{l*} = \circ, \ (\forall i \neq i(j)) \ w_{i(j)j}^{l*} = 1$ باشـــد و $w_{j}^{u*} = (w_{1j}^{u*},\dots,w_{mj}^{u*})$ و $w_{i(j)}^{u*} = \circ, \ (\forall i \neq i(j')) \ w_{i(j)j}^{u*} = 1$ در این صورت

$$\sum_{j=1}^{n} d^{l}(j) + d^{u}(j) = \sum_{j=1}^{n} d^{l}(j) + \sum_{j=1}^{n} d^{u}(j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{ij}^{l*} x_{ij}^{l} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} w_{ij}^{u*} x_{ij}^{u}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} x_{i(j)j}^{l} + \sum_{j=1}^{n} x_{i(j)j}^{u} \leq \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^{l} + \sum_{j=1}^{n} x_{1j}^{u} = 1$$

نامساوی فوق از $x^{l}_{i(j)j} \leq x^{l}_{1j}$ و $x^{u}_{i(j)j} \leq x^{u}_{1j}$ و تساوی آخر از نرمال‌سازی سطری حاصل شدند. فرض کنید ائتلاف S یک زیرمجموعه از بازیکنان $N=(1,...,n)$ باشد.

تابع مشخصه ائتلاف S با برنامه ریزی خطی زیر تعریف می شود:

$$d^{l}(S) = Min \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j\in S} x^{l}_{ij}$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{s} u_i \sum_{j\in S} y^{l}_{ij} = 1,\ \sum_{i=1}^{s} u_i y^{l}_{ij} \geq 0 \ (j=1,...,n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x^{l}_{ij} \geq 0 \ (j=1,...,n)\ ,\ u_i, v_i \geq 0 \ \forall i \qquad (۱۵)$$

$$d^{u}(S) = Min \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j\in S} x^{u}_{ij}$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{s} u_i \sum_{j\in S} y^{u}_{ij} = 1,\ \sum_{i=1}^{s} u_i y^{u}_{ij} \geq 0 \quad (j=1,...,n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x^{u}_{ij} \geq 0 \ (j=1,...,n)\ ,\ u_i, v_i \geq 0 \ \forall i \qquad (۱۶)$$

در برنامه‌ریزی های خطی فوق سودها و هزینه‌های متناظر همه بازیکنان نامنفی است.

قضیه ۸: تابع مشخصه d زبر– جمعی است.

برهان: با تجدید شماره‌گذاری اندیس‌ها می‌توان فرض کرد $S=\{1,...,h\}$ و $T=\{h+1,...,k\}$ و $S\cup T=\{1,...,k\}$ برای این مجموعه‌ها

$$d^{l}(S\cup T)+d^{u}(S\cup T)=\underset{i}{Min}\sum_{j=1}^{k}x_{ij}^{l}+\underset{i}{Min}\sum_{j=1}^{k}x_{ij}^{u}$$
$$\geq\left(\underset{i}{Min}\sum_{j=1}^{h}x_{ij}^{l}+\underset{i}{Min}\sum_{j=1}^{h}x_{ij}^{u}\right)+\left(\underset{i}{Min}\sum_{j=h+1}^{k}x_{ij}^{l}+\sum_{j=h+1}^{k}x_{ij}^{u}\right)$$
$$=d^{l}(S)+d^{l}(T)+d^{u}(S)+d^{u}(T)\ .$$

۳-۲: اجتناب از وقوع وزن صفر و قرار دادن تقدم در وزن‌ها

در جریان محاسبه وزن‌ها یک وزن خاص ممکن است برای تمامی جواب‌های بهینه صفر باشد این بدان معنی است که معیار متناظر آن در جواب بازی به هیچ‌وجه مورد محاسبه قرار نگیرد، حتی با وجود اینکه این معیار به عنوان یک عامل مهم در اوایل بازی به نظر آید. به‌طور کلی‌تر، فرض کنید همه بازیکنان با قرار دادن برتری در معیار خاصی موافق‌اند. مثلاً معیار اول مهم‌تر از معیار دوم باشد. در این صورت باید محدودیت های زیر را به برنامه‌ریزی خطی اولیه‌ی (۳)و(۴) اضافه کنیم. $\frac{w_1}{w_2}\geq 1$ یا $w_1\geq w_2$ همین محدودیت را باید در ائتلاف اولیه‌ی برنامه‌ریزی خطی (۶)و(۷) نیز اعمال کرد.

همچنین، موضوع وزن صفر می‌تواند در این روش حل شود. اگر همه بازیکنان با رجحان تلفیقی در خصوص این معیار موافق باشند، در این صورت می‌توان "روش ناحیه اطمینان[1]" را که درادبیات DEA برای اولین بارمطرح شد، به کار برد (Cooper & et al, 2000,175).

---

[1] -Assurance Region Method

برای مثال فرض کنید معیار برتر w_1 باشد، محدودیت‌ها را در نسبت w_1 قرار دهید:

$$L_i \leq \frac{w_i}{w_1} \leq U_i \quad ، \quad i = 2,...,m$$

که L_i و U_i به ترتیب کران‌های پایین و بالای نسبت $\frac{w_i}{w_1}$ را نشان می‌دهند. این کران‌ها باید با توافق میان همه بازیکنان قرار داده شود. پس برنامه‌ریزی‌های (۸) و (۹) به ترتیب به صورت زیر اصلاح می‌شوند:

$$d^l(k) = Min \sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}^l$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{m} w_i^k = 1 \, , \, w_i^k \geq 0 (i = 1,...,m)$$

$$L_i \leq \frac{w_i}{w_1} \leq U_i \;\; i = 2,...,m \qquad (۱۷)$$

$$d^u(k) = Min \sum_{i=1}^{m} w_i^k x_{ik}^u$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{m} w_i^k = 1 \, , \, w_i^k \geq 0 (i = 1,...,m) \qquad L_i \leq \frac{w_i}{w_1} \leq U_i$$

$$i = 2,...,m \qquad (۱۸)$$

به روش مشابه،برنامه ریزی های خطی (۱۳)و(۱۴) با فرض برتری معیار u_1 به ترتیب به صورت زیر اصلاح می شوند :

$$d^l(j) = Min \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^l$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^l = 1 \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^l \geq 0 \;\; (j = 1,...,n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l} \geq 0 \ (j=1,\dots,n)$$

$$L_i \leq \frac{u_i}{u_1} \leq U_i \quad i=2,\dots,s, L_i \leq \frac{v_i}{u_1} \leq U_i \quad i=1,\dots,m, \qquad (۱۹)$$

$$u_i, v_i \geq 0 \ \forall i$$

$$d^{u}(j) = Min \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{u}$$

$$s.t \quad \sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^{u} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^{u} \geq 0 \quad (j=1,\dots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{u} \geq 0 \ (j=1,\dots,n)$$

$$L_i \leq \frac{u_i}{u_1} \leq U_i \quad \mathrm{i}=2,\dots,s, L_i \leq \frac{v_i}{u_1} \leq U_i \ i=1,\dots,m \qquad (۲۰)$$

$$u_i, v_i \geq 0 \ \forall i$$

به روش مشابه،برنامه ریزی های خطی (15)و(16) با فرض برتری معیار u_1 به ترتیب به صورت زیر اصلاح می شوند :

$$d^{l}(S) = Min \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j\in S} x_{ij}^{l}$$

$$s.t \ \sum_{i=1}^{s} u_i \sum_{j\in S} y_{ij}^{l} = 1, \ \sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^{l} \geq 0 \ (j=1,\dots,n) \quad , \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{l} \geq 0 \ (j=1,\dots,n) \qquad (۲۱)$$

$$L_i \leq \frac{u_i}{u_1} \leq U_i \qquad i=2,\dots,s, L_i \leq \frac{v_i}{u_1} \leq U_i \qquad i=1,\dots,m,, u_i, v_i \geq 0 \ \forall i$$

$$d^{u}(S) = Min \sum_{i=1}^{m} v_i \sum_{j\in S} x_{ij}^{u}$$

$$s.t \ \sum_{i=1}^{s} u_i \sum_{j\in S} y_{ij}^{u} = 1, \ \sum_{i=1}^{s} u_i y_{ij}^{u} \geq 0 \quad (j=1,\dots,n), \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}^{u} \geq 0 \ (j=1,\dots,n)$$

$$,L_i \le \frac{u_i}{u_1} \le U_i \qquad i=2,...,s, L_i \le \frac{v_i}{u_1} \le U_i \qquad i=1,...,m, u_i, v_i \ge 0 \; \forall i$$

(۲۲)

بدیهی است بازیکنی که کمترین نسبت هزینه- سود را به خود اختصاص دهد، موفق‌ترین بازیکن در کسب سود و هزینه مطلوب خواهد بود. یعنی بازیکنی که بیشترین سود و کمترین هزینه را که مطلوب‌ترین شرایط و بهترین وضعیت بازی می باشد به خود اختصاص داده است.

۴- مثال عددی

مثال زیر را با ۱۰ بازیکن و دو معیار هزینه و ۴ معیار سود در نظر بگیرید.

جدول ۱: معیارهای هزینه و سود برای هر کدام از بازیکنان

بازیکن j	x^l_{1j}	x^u_{1j}	x^l_{2j}	x^u_{2j}	y^l_{1j}	y^u_{1j}	y^l_{2j}	y^u_{2j}	y^l_{3j}	y^u_{3j}	y^l_{4j}	y^u_{4j}
۱	۵۰	۷۰	۲۰	۳۰	۸۰۰	۸۵۰	۲۰۰	۳۰۰	۳۵۰	۴۵۰	۳۴۰	۴۴۰
۲	۷۰	۹۰	۱۸	۲۸	۹۰۰	۹۵۰	۱۶۰	۲۶۰	۳۲۰	۴۲۰	۴۷۰	۵۷۰
۳	۸۰	۱۰۰	۲۲	۳۲	۱۰۰۰	۱۰۵۰	۱۷۵	۲۷۵	۳۹۵	۴۹۵	۴۰۰	۵۰۰
۴	۱۱۰	۱۳۰	۳۰	۴۰	۹۵۰	۱۰۰۰	۱۸۵	۲۸۵	۲۹۰	۳۹۰	۵۱۰	۶۱۰
۵	۹۰	۱۱۰	۱۷	۲۷	۹۶۰	۱۰۱۰	۱۸۶	۲۸۶	۲۸۰	۳۸۰	۴۸۰	۵۸۰
۶	۵۵	۷۵	۲۴	۳۴	۸۷۰	۹۲۰	۲۱۰	۳۱۰	۳۶۰	۴۶۰	۳۷۰	۴۷۰
۷	۶۵	۸۵	۲۶	۳۶	۷۸۰	۸۳۰	۱۶۵	۲۶۵	۳۰۰	۴۰۰	۴۴۰	۵۴۰
۸	۷۵	۳۲	۴۲	۶۷۰	۶۷۰	۷۲۰	۱۵۰	۲۵۰	۴۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۶۰۰
۹	۵۰	۲۹	۳۹	۸۱۰	۸۶۰	۸۶۰	۱۷۰	۲۷۰	۴۱۰	۵۱۰	۵۱۰	۶۱۰
۱۰	۱۰۰	۱۶	۲۶	۹۱۰	۹۶۰	۹۶۰	۱۹۰	۲۹۰	۴۲۰	۵۲۰	۳۹۰	۴۹۰

با اجرای مدل های (۱۹)و(۲۰) برای مثال فوق کمترین نسبت هزینه – سود را برای ابتدا و انتهای بازه های مورد نظر برای بازیکنان محاسبه می کنیم.

جدول ۲: کمترین نسبت هزینه- سود (محدودیت‌ها در نسبت u_1 قرار داده شده‌اند)

بازیکن j	کمترین نسبت هزینه- سود برای ابتدای بازه	کمترین نسبت هزینه - سود برای انتهای بازه
۱	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۴۰
۲	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۴۵
۳	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۴۷
۴	۰/۰۰۴۷	۰/۰۰۶۲
۵	۰/۰۰۳۸	۰/۰۰۵۲
۶	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۴۰
۷	۰/۰۰۳۴	۰/۰۰۴۸
۸	۰/۰۰۴۰	۰/۰۰۵۳
۹	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۳۷
۱۰	۰/۰۰۴۳	۰/۰۰۵۷

در جدول ۲ بازیکن نهم کمترین نسبت هزینه- سود را به خود اختصاص داده است پس بازیکن نهم موفق‌ترین بازیکن می‌باشد. بعد از بازیکن نهم، به ترتیب بازیکنان ۱، ۶، ۲، ۷، ۳، ۵، ۸، ۱۰ و ۴ قراردارند بازیکن چهارم در آخر لیست قرار دارد پس ناموفق‌ترین بازیکن این بازی محسوب می‌شود.

ائتلاف موفق‌ترین بازیکنان S_1، ائتلاف ناموفق‌ترین بازیکنان S_2، ائتلاف ناموفق‌ترین بازیکن با بازیکنان موفق ، S_3، ائتلاف موفق‌ترین بازیکن با بازیکنان ناموفق S_4 و ائتلاف‌های تصادفی S_5، را تشکیل داده وشرایط آنها را با اجرای مدل‌های (۲۱) و (۲۲) از لحاظ کسب سود وهزینه مطلوب در جداول زیر بررسی می‌نماییم.

جدول۳ :کمترین نسبت هزینه –سود (ابتدای بازه)

ائتلاف	کمترین نسبت هزینه- سود ائتلاف برای ابتدای بازه	اعضای ائتلاف	کمترین نسبت هزینه- سود اعضا
۰/۰۰۲۸	۹	۰/۰۰۲۶	S_1
۰/۰۰۲۸	۱		
۰/۰۰۲۹	۶		
۰/۰۰۵۳	۴	۰/۰۰۴۵	S_2
۰/۰۰۴۶	۱۰		
۰/۰۰۴۶	۸		
۰/۰۰۵۳	۴	۰/۰۰۳۴	S_3
۰/۰۰۲۸	۹		
۰/۰۰۲۸	۱		
۰/۰۰۲۸	۹	۰/۰۰۳۹	S_4
۰/۰۰۵۳	۴		
۰/۰۰۴۶	۱۰		
۰/۰۰۴۶	۸	۰/۰۰۳۴	S_5
۰/۰۰۳۸	۷		
۰/۰۰۲۸	۱		

جدول ۴:کمترین نسبت هزینه – سود (انتهای بازه)

ائتلاف	کمترین نسبت هزینه- سود ائتلاف برای انتهای بازه	اعضای ائتلاف	کمترین نسبت هزینه- سود اعضا
۰/۰۰۳۷	۹	۰/۰۰۳۹	S_1
۰/۰۰۴۰	۱		
۰/۰۰۴۰	۶		
۰/۰۰۶۲	۴	۰/۰۰۵۸	S_2
۰/۰۰۵۷	۱۰		
۰/۰۰۵۳	۸		
۰/۰۰۳۷	۴	۰/۰۰۴۷	S_3
۰/۰۰۴۰	۹		
۰/۰۰۴۰	۱		
۰/۰۰۶۲	۹	۰/۰۰۵۲	S_4
۰/۰۰۳۷	۴		
۰/۰۰۴۰	۱۰		
۰/۰۰۳۷	۸	۰/۰۰۴۶	S_5
۰/۰۰۶۲	۷		
۰/۰۰۵۷	۱		

S_1، موفق‌ترین ائتلاف می‌باشد که با ائتلاف موفق‌ترین بازیکنان پدید آمده و S_2 ، ناموفق‌ترین ائتلاف می‌باشد که از ائتلاف ناموفق‌ترین بازیکنان پدید آمده است.

نتیجه

این مقاله به بحث درباره‌ی یکی از مهمترین مسائل اجتماعی یعنی تقسیم منافع میان واحدهای تصمیم‌گیری (افراد یا سازمان‌ها) با بهره‌گیری از تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی (رفتار انتخاب وزن دلخواه و جواب برنامه‌ریزی خطی بازی‌ها) پرداخته است. بازی DEA و ویژگی‌هایش را در دو بخش بازی مینیمم DEA و بازی ماکزیمم برای داده های بازه ای تعریف کرده و به بحث درباره ویژگی‌هایش پرداخته‌ایم. با استفاده از بازی مینیمم DEA داده های بازه ای مدلی برای محاسبه کمترین نسبت هزینه- سود هر واحد(به صورت بازه) ارائه شده است. مدل‌های جدیدی برای محاسبه کمترین نسبت هزینه-سود در واحدهای با تعداد بازیکن بیشتر (ائتلاف) معرفی شده است. سپس کاربرد نسبت هزینه- سود جهت تعیین میزان موفقیت واحدها (بازیکنان) بیان شده است. در مدل های ارائه شده برای برطرف کردن مشکل صفر شدن وزن‌های متناظر سودها و هزینه‌ها از روش ناحیه اطمینان استفاده شده است. برای این منظور تغییراتی در مدل‌های مطروحه، اعمال شده و مدل‌های جدیدی به دست آمده است.

منابع:

- Barron, E.N., (2007), Game Theory an Introduction, Wiley-Inter Science.
- Charnes, A., & Cooper, W.W., (1962), Programming with Fractional Function, Naval Res. Logist.Quart., Vol. 9, pp. 181-185.
- Charnes, A., Cooper, W.W., & Rhodes, E., (1978), Measuring the Efficiency of Decision Making Units, European Journal of Operational Research. Vol. 2, pp. 429-444.
- Cooper, W.W., Seiford, L.M., & Tone, K., (2000), Data Envelopment Analysis- a Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software, Boston., Kluwer Academic Publishers.
- Jahanshahloo, G.R., Hosseinzadeh Lotfi, F., & Sohraiee, S., (2006), Egoist's Dilemma with Interval Data, Applied Mathematics and Computation. Vol. 183, pp. 94-105.
- Nakabayashi, K., & Tone, K., (2006), Egoist's dilemma: a DEA game, The International Journal of Managment Science., Vol. 34, pp. 135-148.
- Owen, G., (1975), On the Linear Production Games, Mathematical Programming., Vol. 9, pp. 358-70.