« فراسوی مدیریت»
سال ششم _ شماره ۲۱_ تابستان ۱۳۹۱
ص ص۶۶- ۴۷

کاربرد برنامه ریزی چند هدفه فازی در توسعه یک مدل کنترل موجودی

محمد امین نایبی[۱]
ناصر حمیدی[۲]
عباس پناهی نیا[۳]
حسام سعیدی[۴]

چکیده

در این مقاله یک مدل کنترل موجودی چند کالایی با اهداف کمینه سازی هزینه کل و حداقل بکارگیری نیروی انسانی، تحت محدودیتهای حداکثر فضای انبار، حداکثر توان سرمایه گذاری، میزان کمبود مجاز در هر دوره و مقدار سفارش دوره ای ارائه می شود که دو محدودیت اخیر بصورت بازه ای در نظر گرفته شده است. در مدل ارائه شده کمبود مجاز بوده، زمان تدارک صفر و پارامترهای تقاضا، هزینه(شامل: راه اندازی، نگهداری، کمبود) و منابع محدودیتها بصورت فازی است. اعداد فازی تقاضا و هزینه بصورت مثلثی و اعداد منابع محدودیتها از نوع ذوذنقه ای مثبت می باشند. در حل مدل ابتدا هر یک از توابع هدف مورد نظر به سه تابع هدف تبدیل و محدودیتها از طریق روش نافازی سازی به محدودیتهای قطعی تبدیل میگردند. سپس مدل چند هدفه قطعی حاصل، از طریق روش برنامه ریزی غیر خطی فازی (FNLP) حل شده است. در پایان یک مثال عددی برای تشریح مدل با استفاده از نرم افزار لینگو (Lingo) حل و ارائه می شود.

واژه های کلیدی:

کنترل موجودی، برنامه ریزی چند هدفه، عدد فازی و برنامه ریزی غیرخطی فازی (FNLP)

---

۱. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، باشگاه پژوهشگران جوان، قزوین، ایران (نویسنده مسئول:Amin.Nayebi@gmail.com)
۲. دپارتمان مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، قزوین، ایران.
۳. دپارتمان مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت و حسابداری، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد قزوین، قزوین، ایران
٤. دانش آموخته کارشناسی ارشد مدیریت صنعتی، دانشگاه اسلامی کار، قزوین، ایران

مقدمه

از اولین بار که هریس مدل مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) را برای تعیین اندازه سفارش تدوین و ارائه کرد، جهان شاهد پیشرفت روزافزونی بوده و تا امروز که نزدیک به یک قرن از تدوین این مدل می گذرد نیاز به انطباق معادلات و مدلها بر اساس شرایط محیطی پویا بیشتر احساس می‌شود. تصمیم‌گیری صحیح در مورد هزینه کل در حالتی که نمی‌توان پیش‌بینی دقیقی در مورد مولفه‌های تشکیل دهنده آن داشت کار غیر ممکنی به نظر می‌رسد. بنابراین جهت حل چنین مشکلی ضرورت دارد تا به توسعه مدلهای کنترل موجودی در جهت انطباق با یک محیط پویا پرداخت. اهمیت این توسعه از آنجا ناشی می‌شود که مدلهای تدوین شده برای کنترل موجودی برای محیط ایستا تدوین شده‌اند در حالی که پویا بودن محیط واقعی کارایی این گونه فرمولها را زیر سؤال می برد. در ادامه مروری بر تحقیقات انجام شده در این زمینه خواهیم داشت.از زمان تدوین و ارائه مدل EOQ به وسیله هریس (Yadvalle, 2005) تعداد زیادی از محققین روی سیستم کنترل موجودی کار کرده‌اند. مدلهای کلاسیک و مدلهای تعیین اندازه سفارش قطعی توسط ورل‌هال (Matty, 2005) ارائه شد. اما با توجه به محیط تولید و پویا یی آن، مدلهای ایستا به دلیل رفتار چنین سیستمهایی در این محیط کارا نبوده و نمی‌توان انتظار نتایج کاربردی موثری از چنین فرمولهایی داشت. با توجه به ویژگی چنین محیطی، سیستم‌های موجودی توسط محققینی چون پادمنباهان، وارت، رئوف و بندایا، برخروف وهارِیگا توسعه یافت که در این مدلها تقاضا یا هزینه تولید فازی و تابعی از زمان در نظر گرفته شده بود(Yadvalle, 2005). مجموعه فازی نیز اولین‌بار توسط لطفی‌زاده معرفی شد(Zadeh,1965) و دانشمندانی چون زیمرمن (Zimmerman,1985) این تئوری را برای حل مسائل تصمیم گیری بکار بردند. یادولی(Yadvalle, 2005) بر اساس مدل EOQ یک مدل از یک سیستم چند کالایی را در یک محیط فازی معرفی نمود و کاربرد آنرا در مدل برنامه‌ریزی منابع انسانی تشریح کرد. مفروضات این مطالعه عبارتنداز: لحظه‌ای بودن تولید، مجاز نبودن کمبود، زمان تدارک صفر و یکسان بودن نرخ تقاضا برای n کالا. در این مقاله تابع عضویت در سه حالت خطی، مکعبی (غیرخطی) و احتمالی بررسی شده و نتیجه گرفته شده که تابع عضویت خطی بهترین ارزش را ایجاد می کند. ابو ال اتا (Abo el ata & Kot, 1997) در پی ایجاد یک تقریب مناسب برای حل مسائل تک کالایی در N دوره بوده است. در

این مطالعه دو حالت معین و نامعین بودن تقاضای هر دوره در حالتی که کمبود مجاز نیست را مورد بررسی قرار می دهد. در این مقاله از الگوریتم تکاملی به جای پویا و در محیط فازی استفاده شده و دو هدف حداقل کردن هزینه فازی و حداقل کردن تعداد دوره‌ها نیز مدنظر قرار گرفته است. این مقاله تنها شروعی بر مطالعه کنترل موجودی N دوره‌ای بدون استفاده از برنامه‌ریزی پویا است. مقاله دیگری توسط ابراهِیم و چن (Chan & Ibrahim, 2003) ارائه شد. این مقاله با فازی در نظر گرفتن نرخ بهره، به عنوان ابزار اندازه‌گیری هزینه‌ها و سرمایه گذاری در مدل کلاسیک EOQ به ارائه یک مدل پرداخته‌است. سوجِیت‌کومار (Kumar & Wami, 2006) به دنبال حداکثر کردن سود و حداقل کردن هزینه ضایعات به ارائه مقاله پرداخته که در این مطالعه برای نخستین بار مسائل موجودی دو هدفه را در یک محیط فازی فرموله کرده و به وسیله الگوریتم برنامه ریزی غیر خطی فازی (FNLP) و برنامه ریزی هندسی فازی (FGP) آنها را حل نموده است. هیداکی و همکارانش (Katagiri & Ishii, 2002) به ارائه مطالعه ای در زمینه کنترل موجودی یک کالای فاسد شدنی با هزینه کمبود و هزینه از مد افتادگی پرداخته است. هدف این مقاله پیدا کردن راه حلی برای حداکثر کردن سود مورد نظر است. در مقاله حاضر یک مدل کنترل موجودی با اهداف کمینه سازی هزینه ها و تعداد نیروی انسانی مورد نیاز به همراه محدودیتهای حداکثر فضای انبار، حداکثر توان سرمایه گذاری، میزان کمبود مجاز در هر دوره و مقدار سفارش دوره ای ارئه شده است که دو محدودیت اخیر بصورت بازه ای در نظر گرفته شده است. در این مدل پارامترهای تقاضا، هزینه(شامل: راه اندازی، نگهداری، کمبود) و منابع محدودیتها بصورت فازی است. اعداد فازی تقاضا و هزینه بصورت مثلثی و منابع محدودیتها از نوع ذوذنقه ای مثبت می باشند. در حل مدل ابتدا هر تابع هدف به سه تابع هدف نافازی شده و محدودیتها نیز از طریق روش نافازی سازی به قطعی تبدیل شده و سپس مدل چند هدفه قطعی با شش تابع هدف از طریق روش برنامه ریزی غیر خطی فازی حل شده است. این مقاله بصورت زیر سازماندهی شده است: در بخش اول نمادها، علائم و مفروضات ارائه میگردد، در بخش دوم به توسعه مدل ، در بخش سوم به متودولوژی حل مدل، بخش چهارم مثال عددی و در بخش آخر به نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای تحقیقات آتی می پردازیم.

نمادها و علائم و مفروضات

در توسعه مدل کنترل موجودی مورد نظر از برخی علائم، نمادها و مفروضات به شرح و توصیف ذیل استفاده شده است:

۱- نمادها و علائم

$\widetilde{C}_{1i}$: هزینه فازی نگهداری کالای i ام (i = ۱،۲،...،n)

$\widetilde{C}_{2i}$: هزینه فازی کمبود کالای i ام (i = ۱،۲،...،n)

$\widetilde{C}_{3i}$: هزینه فازی راه‌اندازی ماشین i ام (i = ۱،۲،...،n)

C_{4i}: هزینه تولید کالای i ام (i = ۱،۲،...،n)

$\widetilde{D}_i$: تقاضای فازی (i = ۱،۲،...،n)

Q_i: مقدار سفارش کالای i ام

S_i: مقدار کمبود کالای i ام

a: حد پایین عد فازی

b: حد وسط عدد فازی

e: حد بالای عد فازی

$\widetilde{W}$: حداکثر فضای انبار

$\widetilde{U}$: حداکثر میزان سرمایه‌گذاری

L_i: تعداد کارگر مورد نیاز برای یک واحد از کالای iام

$\sim$: نماد فازی

۲-مفروضات

برای توسعه مدل فرض بر مفروضات زیر است:

۱. بهینه سازی توابع چند هدفه در یک سیستم موجودی امکان پذیر است .

۲. امکان بروز کمبود در سیستم‌های کنترل موجودی امکان پذیر است .

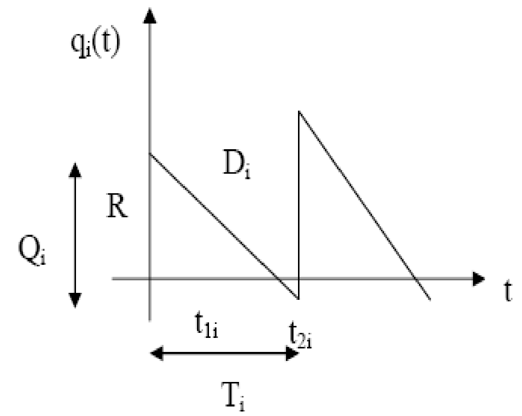
۳. امکان بیان برخی هزینه‌ها بصورت فازی توسط تصمیم‌گیرنده وجود دارد.

۴. امکان بیان تقاضا بصورت فازی وجود دارد.

۵. نرخ تولید لحظه‌ای است و زمان تدارک صفر می باشد.

توسعه مدل

اگر در زمان t=0 برای i امین کالا مقدار ذخیره موجودی به اندازه R_i باشد. در فاصله $\left(T_i = t_{1i} + t_{2i}\right)$سطوح موجودی بتدریج کاهش می یابد تا زمانی که تقاضای جدید به انبار برسد. در این فرایند سطح موجودی در زمان t_{1i} به سطح صفر رسیده و سپس در فاصله $\left(t_{1i}, T_i\right)$ کمبود اتفاق می افتد و چرخه خودش دوباره تکرار می شود (نمودار۱).



نمودار ۱: نمایش شماتیک سیستم موجودی

با توجه به نمودار ۱، معادله دیفرانسیل برای موجودی آنی در زمان t در (o,T_i) بوسیله فرمولهای زیر داده شده است :

$$\frac{dq_i(t)}{dt} = -D \qquad \text{for} \quad 0 \le t \le t_{1i}$$
$$\frac{dq_i(t)}{dt} = -D \qquad \text{for} \quad t_{1i} \le t \le T_i \qquad (۱)$$

با شرط اولیه

$$q_i\left(T_i\right) = -s_i \,, q_i\left(t_{1i}\right) = 0 \,, q_i(0) = R_i\left(=Q_i - S_i\right) \qquad (۲)$$

برای هر دوره یک مقدار ثابت کمبود مجاز است و هزینه جریمه کمبود C_{2i} برای کالاهائی که تقاضای هر واحد زمانی را برآورده نکنند وجود دارد.
برای معادله بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} q_i(t) &= R_i - D_i t \quad \text{for} \quad 0 \le t \le t_{1i} \\ q_i(t) &= D_i (t_{1i} - t) \quad \text{for} \quad t_{1i} \le t \le T_1 \end{aligned} \tag{۳}$$

بنابراین

$$D_i t_{1i} = R_i \quad , \quad S_i = D_i t_{2i} \quad , \quad Q_i = D_i T_{i0} \tag{۴}$$

با در نظر گرفتن مساحت زیر مثلث تا نقطه t_{1i} هزینه نگهداری به شکل زیر بدست می آید:

$$\text{هزینه نگهداری} = c_{1i} \int_0^{t_{1i}} q_i(t)\, dt = \frac{c_{1i}(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} T_i \tag{۵}$$

هزینه کمبود با محاسبه مساحت مثلث کوچک زیر نمودار فاصله T_i تا t_{li} بدست می آید:

$$\text{هزینه کمبود} = C_{2i} \int_{t_{1i}}^{Ti} \left(-q_i(t)\right) dt = \frac{c_{2i} - s_i}{2Q_i} T_i \tag{۶}$$

هزینه تولید با ضرب هزینه تولید هر واحد کالا در مقدار تولید بدست می‌آید:

$$\text{هزینه تولید} = C_{4i} Q_i \tag{۷}$$

و هزینه کل به شکل زیر بدست می‌آید:

هزینه کمبود + هزینه نگهداری + هزینه راه‌اندازی + هزینه تولید = هزینه کل

$$TC = C_{4i} Q_i + C_{3i} + C_{1i} \frac{(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} T_i + C_{2i} \frac{S_i^2}{2Q_i} T_i \tag{۸}$$

هدف دیگر مدل کمینه سازی تعداد کل نیروی انسانی است که در این مورد داریم:

$$TL = \sum_{i=1}^{n} L_i Q_I \qquad (۹)$$

در مسائل موجودی همیشه تعدادی محدودیت وجود دارد. در این تحقیق دو محدودیت فضای انبار و حداکثر سرمایه‌گذاری در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} ss(Q) &\le \mathrm{w} \\ \mathrm{pc}(\mathrm{D}) &\le \mathrm{u} \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

و محدودیتهای حد بالا و پائین نیز بصورت زیر در نظر گرفته می شوند:

$$LQ_{\mathrm{i}} \le \mathrm{Q_i} \le \mathrm{UQ_i} \qquad \mathrm{LS_i} \le \mathrm{S_i} \le \mathrm{US_i} \qquad (۱۲)$$

با در نظر گرفتن اینکه هزینه کل بدست آمده برای یک دوره می‌باشد با تقسیم Tc بر T_i هزینه متوسط کل بدست می آید:

$$\text{متوسط هزینه کل} = \frac{C_{4i}Q_i}{T_i} + C_{3i}\frac{1}{T_i} + C_{1i}\frac{(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} T_i \cdot \frac{1}{T_i} + C_{2i}\frac{S_i^2}{2Q_i} T_i \cdot \frac{1}{T_i} \qquad (۱۳)$$

با در نظر گرفتن اینکه: $T_i = \frac{Q_i}{D_i}$ نتیجه می شود:

$$\text{متوسط هزینه کل} = C_{4i}D_i + C_{3i}\frac{D_i}{Q_i} + C_{1i}\frac{(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} + C_{2i}\frac{S_i^2}{2Q_i} \qquad (۱۴)$$

و با اضافه کردن محدودیتها داریم :

$$\begin{aligned} &SS(Q) \equiv \Sigma W_i Q_i \le W \\ &PC(D) \equiv \Sigma C_{4i} Q_i \le U \qquad (۱۵) \\ &LQ_{\mathrm{i}} \le \mathrm{Q_i} \le \mathrm{UQ_i} \qquad \mathrm{LS_i} \le \mathrm{S_i} \le \mathrm{US_i} \end{aligned}$$

با توجه اثبات مدل که در بالا ذکر گردید، مسئله ای در حالت کلی ذیل مورد نظر است:

مدیریت کارخانه ای برای تعیین هزینـه متوسـط سـالیانه موجـودی‌هـای خـود از مجموع چهار هزینه، نگهـداری کـالا (C_{1i})، هزینـه کمبـود (C_{2i})، هزینـه راه انـدازی (C_{3i}) و هزینه تولید (C_{4i}) برای کالای i ام استفاده می‌کند. هزینه‌ها به صـورت عـدد فازی مثلثی در نظر گرفته شده و حداکثر فضای انبار در دسترس به میزان (W) متر مربع می‌باشد. مدیریت کارخانه می‌تواند در صورت لزوم به اندازه pw واحد دیگـر بـه فـضای انبار خود اضافه کند. واحد برنامه ریزی و کنترل موجودیها در نظر دارد تا حداکثر(u)واحد برای تولید کالا سرمایه گذاری کند، این میزان می‌تواند به میزان u+pu واحد افـزایش یابد. مدیریت شرکت مایل است تا مقدار سفارش(Q) هر کالا از حداکثر UQ_i واحـد و حداقل LQ_i واحد تجاوز نکند و کمبود نیز بـین US_i و LS_i واحـد در نوسـان باشـد. مدل چنین مسئله ای بصورت زیر است که در آن هزینه هـای فـازی بـه فـرم ($\widetilde{C}_{ii}$) و محدودیت‌ها به فرم ($\widetilde{\leq}$) نشان داده شده اند که مدل با دو هدف کمینه سازی هزینه ها و تعداد نیروی انسانی بصورت زیر می باشد:

$$
\begin{aligned}
&Min \quad : Tc\ (\widetilde{C}_i, \widetilde{D}_i, Q_i, S) = \widetilde{C}_{4i} Q_i + \widetilde{C}_{3i} \frac{\widetilde{D}_i}{Q_i} \\
&+ \widetilde{C}_{1i} \frac{(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} + \widetilde{C}_{2i} \frac{S_i^2}{2Q_i} \\
&Min \quad : TL = \sum_{i=1}^{n} L_i Q_i \\
&S.t: \\
&ss\ (Q) \equiv \sum w_{4i} Q_i \ \widetilde{\leq}\ W \\
&Pc\ (\widetilde{D}) \equiv \sum C_{4i} Q_i \ \widetilde{\leq}\ u \\
&LQ_i \leq Q_i \leq UQ_i \\
&LS_i \leq S_i \leq uS_i
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

در این حالت تقاضا بصورت فازی و هزینه متوسط کـل از مجمـوع چهـار هزینـه؛ شـامل هزینـه تولیـد$C4i$ ، هزینـه راه انـدازی C_{3i} ، هزینـه کمبـود C_{2i} و هزینـه نگهداری$C1i$ بدست می‌آید. با توجه به اینکه در این مدل هزینه تولید ثابت بدست می آید و یک پارامتر ثابت تاثیری در بهینگی ندارد، فلذا در حل مدل و محاسبات مربوطـه از

هزینه های مورد نظر یعنی C_{4i}ها صرف نظر کرده و تابع متوسط هزینه ها مجموع سه هزینه دیگر است. هزینه ها و تقاضاهای فازی با علامت(~) نشان داده شده و محدودیت‌ها مطابق مدل فوق در نظر گرفته شده اند. در نتیجه مدل بصورت زیر تبدیل می‌شود.

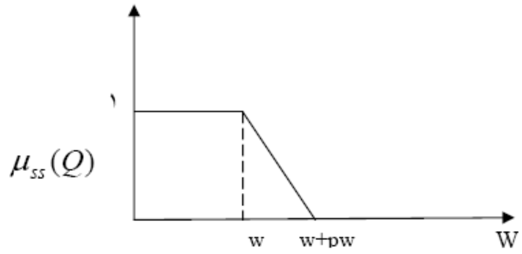
$$\begin{aligned}
&Min \quad : Tc \ (\tilde{C}_i, \tilde{D}_i, Q_i, S) = \tilde{C}_{3i} \frac{\tilde{D}_i}{Q_i} + \\
&\tilde{C}_{1i} \frac{(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} + \tilde{C}_{2i} \frac{S_i^2}{2Q_i} \\
&Min \quad : TL = \sum_{i=1}^{n} L_i Q_i \\
&S.t: \\
&ss(Q) \equiv \sum w_{4i} Q_i \ \tilde{\leq} \ W \\
&Pc(\tilde{D}) \equiv \sum C_{4i} Q_i \ \tilde{\leq} \ u \\
&LQ_i \leq Q_i \leq UQ_i \\
&LS_i \leq S_i \leq uS_i
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

توابع عضویت و محدودیت‌ها خطی در نظر گرفته شده و بصورت زیرتعریف شده‌اند:

الف–تابع عضویت حداکثر فضای انبار :

$$\mu_{ss}(Q) = \begin{cases} 0 & \sum_{i=1}^{n} W_i Q_i > w + pw \\ 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} W_i Q_i - W}{Pw} & W \leq \sum_{i=1}^{n} W_i Q_i \leq W + Pw \\ 1 & \sum_{i=1}^{n} W_i Q_i < W \end{cases} \tag{۱۸}$$

بصورت شماتیک چنین می‌توان نشان داد:

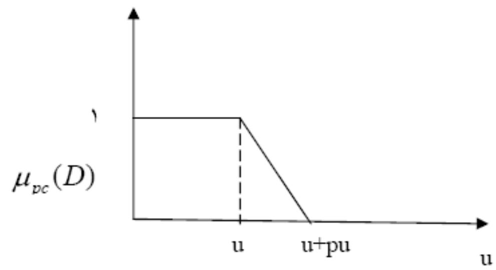


نمودار۲: تابع عضویت حداکثر فضای انبار

ب)تابع عضویت برای حداکثر سرمایه گذاری:

$$\mu_{pc}\ (D) = \begin{cases} 0 & \sum\ C_{4i}Q_i > u + pu \\ 1 - \dfrac{\sum_{i=1}^{n} C_{4i}Q_i - U}{Pu} & u \le \sum_{i=1}^{n} C_{4i}Q_i \le u + Pu \\ 1 & \sum_{i=1}^{n} C_{4i}Q_i < U \end{cases} \qquad (۱۹)$$

به صورت شماتیک چنین می‌توان نشان داد:



نمودار۳: تابع عضویت حداکثر سرمایه گذاری

متودولوژی حل مدل :

با توجه به اینکه ضرائب متغیرها در تابع هدف فازی هستند، رویکردهای مختلفی برای حل مسئله فوق وجود دارد. در اینجا تابع فازی میینیمم هزینه را به سه تابع بصورت کمینه سازی تلرانس راست و عدد وسط و بیشینه سازی تلرانس چپ تبدیل می گردد (شوندی، ۱۳۸۵).

$$Max\, z_1 = (C_{3ib} - C_{3ia})\frac{(D_{ib} - D_{ia})}{Q_i} + (C_{1ib} - C_{1ia})\frac{(Q_i - S_i)}{2Q} + (C_{2ib} - C_{2ia})\frac{Si^2}{2Q_i}$$

$$Min\, z_2 = C_{3i}\frac{D_{ib}}{Q_i} + C_{1ib}\frac{(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} + C_{2ib}\frac{(s_i^2)}{2Q_i} \qquad (۲۰)$$

$$Min\, z_3 = (C_{3ie} - C_{3ib})\frac{(D_{ie} - D_{ib})}{Q_i} + (C_{1ie} - C_{1ib})\frac{(Q_i - S_i)^2}{2Q_i} + (C_{2ie} - C_{2ib})\frac{S_i^2}{SQ}$$

در مورد تابع کمینه سازی تعداد منابع انسانی نیز داریم:

$$\begin{aligned} &Max\ : z_4 = (L_{ib} - L_{ia})Q_i \\ &Min\ : z_5 = L_{ib}Q_i \qquad (۲۱) \\ &Min\ : z_6 + (L_{ic} - L_{ib})Q_i \end{aligned}$$

توابع حاصل از مرحله قبل که در مجموع شش تابع می باشد را هربار به طور جداگانه با محدودیت‌ها، در نظر گرفته می‌شوند و بااستفاده از نرم‌افزارلینگو حل می‌گردند. اما از آنجایی که سمت راست محدودیت‌ها فازی هستند. مطابق روش برنامه ریزی غیر خطی فازی (FNLP) هر تابع با حد بالا و سپس با حد پایین عدد فازی بزرگ در نظر گرفته و حل می شوند.در این مرحله می بایست به حل مدل چند هدفه قطعی بپردازیم. بدین منظور روشهای مختلفی ارائه شده است که در اینجا از روش منطق فازی که بر اساس درجه عضویت هر یک از اهداف مدل است استفاده می کنیم. بطوری که ابتدا مقادیر بیشینه و کمینه هریک از اهداف تعیین شده را محاسبه کرده و سپس با تعیین درجه عضویت هر یک از اهداف میزان α که همان درجه تحقق اهداف است بدست می آید(Georg & Yuan, 2001):

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Max\ : \alpha \\ &S.t : \alpha \le \mu(Z_i), i = 1,2,\dots k \qquad (۲۲) \\ &g_i(x_1, x_2, \dots x_n) \underset{\ge}{\le} b_i, i = 1,2,\dots m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \alpha \le \mu(Z_i) = \alpha \le \frac{Z_i - L_i}{U_i - L_i} \qquad (۲۳) \\ &\Rightarrow Z_i \ge U_i - \Delta_i(1-\alpha) \end{aligned}$$

و در صورتی که αها یکسان نباشند خواهیم داشت :

$$Max : \sum \alpha_i$$
$$\alpha_i \le \mu(Z_i), i = 1,2,...k \qquad (۲۴)$$

در نهایت از حل مدل تک هدفه نهایی مقادیری برای متغیرهای مقدار کمبود (S) مقدار سفارش(Q) بدست می آید که با قرار دادن آنها در تابع (z) مقدار حداقل هزینه و حداقل نیروی انسانی مورد نیاز حاصل می شود.

مثال عددی

یک کارگاه تولید سه نوع محصول تولید می نماید. اطلاعات زیر در دسترس است

$\widetilde{D}_1 = (100 \quad 200 \quad 300)$	$\widetilde{D}_3 = (100 \quad 120 \quad 140)$	$\widetilde{L}_1 = (1 \quad 2 \quad 3)$
$\widetilde{D}_2 = (50 \quad 75 \quad 100)$	$\widetilde{C}_{11} = (1 \quad 1.5 \quad 2)$	$\widetilde{L}_2 = (2 \quad 3 \quad 4)$
$\widetilde{C}_{12} = (1.5 \quad 2 \quad 2.5)$	$\widetilde{C}_{13} = (3 \quad 4 \quad 5)$	$\widetilde{L}_3 = (2 \quad 3 \quad 4)$
$\widetilde{C}_{21} = (13 \quad 15 \quad 17)$	$\widetilde{C}_{22} = (19 \quad 21 \quad 23)$	$\widetilde{W} = (275 \quad 275 \quad 300)$
$\widetilde{C}_{23} = (35 \quad 37 \quad 39)$	$\widetilde{C}_{31} = (0.3 \quad 0.5 \quad 0.7)$	$W_1 = 0.25m^2$
$\widetilde{C}_{32} = (0.4 \quad 0.5 \quad 0.6)$	$\widetilde{C}_{33} = (0.6 \quad 0.8 \quad 1)$	$W_2 = 1m^2$
$W_3 = 2m^2$	$C_{41} = 8$	$C_{42} = 12$
$\widetilde{U} = (2000 \quad 2000 \quad 3000)$	$C_{43} = 22$	

بخش تولید بنا بر تجربه سالهای گذشته دریافته است که میزان کمبود و سفارش هر یک از محصولات باید در محدوده ذیل باشد:

$$5 \le S_1 \le 10 \qquad Q_1 \ge 10$$
$$3 \le S_2 \le 7 \qquad Q_2 \ge 5$$
$$1 \le S_3 \le 5 \qquad Q_3 \ge 10$$

با توجه به داده های در دسترس مدیریت کارگاه بدنبال دستیابی بـه میـزان بهینـه کمبود ($S^*{}_i$) و مقدار بهینه سفارش ($Q^*{}_i$) است تا هزینه کل و تعـداد نیـروی انـسانی مورد نیاز کمینه گردد.

با عنایت به داده های مسئله مدل بصورت زیر خواهد بود:

$$
\begin{aligned}
&Min: Tc = (0.3,0.5,0.7)\frac{(100,200,300)}{Q_1} + (0.4,0.5,0.6)\frac{(50,75,100)}{Q_2} + \\
&(0.6,0.8,1)\frac{(100,120,140)}{Q_3} + (1,1.5,2)(\frac{(Q_1 - S_1)^2}{2Q_1}) + (1.5,2,2.5)(\frac{(Q_2 - S_2)^2}{2Q_2}) \\
&+ (3,4,5)(\frac{(Q_3 - S_3)^2}{2Q_3}) + (13,15,17)(\frac{S_1{}^2}{2Q_1}) + (19,21,23)(\frac{S_2{}^2}{2Q_2}) + (35,37,39)(\frac{S_3{}^2}{2Q_3}) \\
&Min: TL = (1,2,3)Q_1 + (2,3,4)Q_2 + (2,3,4)Q_3 \\
&S.t: \\
&0.25Q_1 + Q_2 + 2Q_3 \le (275,275,300) \\
&8Q_1 + 12Q_2 + 22Q_3 \le (2000,2000,3000) \\
&5 \le S_1 \le 10, \quad 3 \le S_2 \le 7, \quad 1 \le S_3 \le 5 \\
&Q_1 \ge 10, \quad Q_2 \ge 5, \quad Q_3 \ge 10
\end{aligned}
$$

با توجه به متودولوژی ذکر شده خواهیم داشت:

$$Max(b-a): Z_1 = \frac{70}{Q_1} + \frac{17.5}{Q_2} + \frac{36}{Q_3} + 0.25Q_1 - 0.5S_1 + 0.25\frac{S_1^{\ 2}}{Q_1} + 0.25Q_2 - 0.5S_2$$
$$+ 0.25\frac{S_2^{\ 2}}{Q_2} + 0.5Q_3 - S_3 + 0.5\frac{S_3^{\ 2}}{Q_3} + \frac{S_1^{\ 2}}{Q_1} + \frac{S_2^{\ 2}}{Q_2} + \frac{S_3^{\ 2}}{Q_3}$$
$$Min(b): Z_2 = \frac{100}{Q_1} + \frac{37.5}{Q_2} + \frac{96}{Q_3} + 0.75Q_1 - 1.5S_1 + \frac{0.75S_1^{\ 2}}{Q_1} + Q_2 - 2S_2 + \frac{S_2^{\ 2}}{Q_2}$$
$$+ 2Q_3 - 4S_3 + \frac{2S_3^{\ 2}}{Q_3} + \frac{7.5S_1^{\ 2}}{Q_1} + \frac{10.5S_2}{Q_2} + \frac{18.5S_3}{Q_3} + \frac{2S_3^{\ 2}}{Q_3} + \frac{7.5S_1^{\ 2}}{Q_1} + \frac{10.5S_2}{Q_2} + \frac{18.5S_3}{Q_3}$$
$$\frac{2S_3^{\ 2}}{Q_3} + \frac{7.5S_1^{\ 2}}{Q_1} + \frac{10.5S_2}{Q_2} + \frac{18.5S_3}{Q_3}$$
$$Min(c-b): Z_3 = \frac{110}{Q_1} + \frac{22.5}{Q_2} + \frac{44}{Q_3} + 0.25Q_1 - 0.5S_1 + \frac{0.25S_1^{\ 2}}{Q_1} + 0.25Q_2 + -0.5S_2$$
$$+ \frac{0.25S_2^{\ 2}}{Q_2} + 0.5Q_3 - S_3 + \frac{0.5S_3^{\ 2}}{Q_3} + \frac{S_1^{\ 2}}{Q_1} + \frac{S_2^{\ 2}}{Q_2} + \frac{S_3^{\ 2}}{Q_3}$$
$$Max(b-a): Z_4 = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$Min(b): Z_4 = 2Q_1 + 3Q_2 + 3Q_3$$
$$Min(c-b): Z_4 = Q_1 + Q_2 + Q_3$$
$$S.t:$$
$$0.25Q_1 + Q_2 + 2Q_3 \le 275$$
$$0.25Q_1 + Q_2 + 2Q_3 \le 300$$
$$8Q_1 + 12Q_2 + 22Q_3 \le 2000$$
$$8Q_1 + 12Q_2 + 22Q_3 \le 2000$$
$$5 \le S_1 \le 10, \quad 3 \le S_2 \le 7, \quad 1 \le S_3 \le 5$$
$$Q_1 \ge 10, \quad Q_2 \ge 5, \quad Q_3 \ge 10$$

با استفاده از روش FNLP و حل مدل به وسیله نرم افزار لینگو جدول شماره ۱ زیر بدست می‌آید.

جدول ۱: مقادیر جواب توابع هدف مسئله

	Z_{11}	Z_{12}	Z_{21}	Z_{22}	Z_{31}	Z_{32}	Z_{41}	Z_{42}	Z_{51}	Z_{52}	Z_{61}	Z_{62}	U_i	L_i
Z_{11}	18.36714	18.36714	19.2083	19.2083	349.748	Inf	23.375	23.375	23.375	23.375	64.979	Inf	349.748	18.36714
Z_{12}	18.37614	18.37614	19.2083	19.2083	349.748	104.0478	23.375	23.375	23.375	23.375	64.979	96.047	349.748	18.36714
Z_{21}	76.6808	76.6807	68.1225	68.1225	349.748	Inf	85.475	85.475	85.475	85.475	210.0244	Inf	210.0244	68.1225
Z_{22}	76.687	76.687	68.1225	68.1225	69.8019	387.2507	85.475	85.475	85.475	85.475	210.0244	303.251	387.2507	68.1225
Z_{31}	21.6307	21.6307	22.425	22.425	77.0416	Inf	29.175	29.175	29.175	29.175	66.957	Inf	77.0416	21.6307
Z_{32}	21.6307	21.6307	22.425	22.425	77.0416	105.9654	29.175	29.175	29.175	29.175	66.957	97.96524	105.9654	21.6307
Z_{41}	41	41	42	42	99	Inf	25	25	25	25	230	Inf	230	25
Z_{42}	41	41	42	42	99	355	25	25	25	25	230	355	355	25
Z_{51}	103	103	106	106	287	Inf	65	65	65	65	475	Inf	475	65
Z_{52}	103	103	106	106	287	725	65	65	65	65	475	725	725	65
Z_{61}	41	41	42	42	9	Inf	25	25	25	25	230	Inf	230	25
Z_{62}	41	41	42	42	99	355	25	25	25	25	230	355	355	25
Q_1	20	20	20	20	10	340	10	10	10	10	215	340		
Q_2	11	11	12	12	5	5	5	5	5	5	5	5		
Q_3	10	10	10	10	84	10	10	10	10	10	10	10		
S_1	5	5	5	5	10	5	5	5	5	5	5	5		
S_2	3	3	3	3	7	7	3	3	3	3	3	3		
S_3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		

با توجه به جدول ۱ ، مدل نهایی مسئله بصورت ذیل خواهد بود:

$$Max : Z = \alpha$$

$$\frac{70}{Q_1}+\frac{17.5}{Q_2}+\frac{36}{Q_3}+0.25Q_1-0.5S_1+0.25\frac{S_1^{\,2}}{Q_1}+0.25Q_2-0.5S_2+0.25\frac{S_2^{\,2}}{Q_2}+0.5Q_3-S_3+$$
$$0.5\frac{S_3^{\,2}}{Q_3}+\frac{S_1^{\,2}}{Q_1}+\frac{S_2^{\,2}}{Q_2}+\frac{S_3^{\,2}}{Q_3}\le 349.748(349.748-18.36714)(1-\alpha)$$

$$\frac{70}{Q_1}+\frac{17.5}{Q_2}+\frac{36}{Q_3}+0.25Q_1-0.5S_1+0.25\frac{S_1^{\,2}}{Q_1}+0.25Q_2-0.5S_2+0.25\frac{S_2^{\,2}}{Q_2}+0.5Q_3-S_3+$$
$$0.5\frac{S_3^{\,2}}{Q_3}+\frac{S_1^{\,2}}{Q_1}+\frac{S_2^{\,2}}{Q_2}+\frac{S_3^{\,2}}{Q_3}\le 349.748(349.748-18.36714)(1-\alpha)$$

$$\frac{100}{Q_1}+\frac{37.5}{Q_2}+\frac{96}{Q_3}+0.75Q_1-1.5S_1+\frac{0.75S_1^{\,2}}{Q_1}+Q_2-2S_2+\frac{S_2^{\,2}}{Q_2}+2Q_3-4S_3+\frac{2S_3^{\,2}}{Q_3}+$$
$$\frac{7.5S_1^{\,2}}{Q_1}+\frac{10.5S_2}{Q_2}+\frac{18.5S_3}{Q_3}\le 210.0244-(210.0244-68.2125)(1-\alpha)$$

$$\frac{100}{Q_1}+\frac{37.5}{Q_2}+\frac{96}{Q_3}+0.75Q_1-1.5S_1+\frac{0.75S_1^{\,2}}{Q_1}+Q_2-2S_2+\frac{S_2^{\,2}}{Q_2}+2Q_3-4S_3+\frac{2S_3^{\,2}}{Q_3}+$$
$$\frac{7.5S_1^{\,2}}{Q_1}+\frac{10.5S_2}{Q_2}+\frac{18.5S_3}{Q_3}\le 387.2507-(387.2507-68.2125)(1-\alpha)$$

$$\frac{110}{Q_1}+\frac{22.5}{Q_2}+\frac{44}{Q_3}+0.25Q_1-0.5S_1+\frac{0.25S_1^{\,2}}{Q_1}+0.25Q_2+-0.5S_2+\frac{0.25S_2^{\,2}}{Q_2}+0.5Q_3-S_3+$$
$$\frac{0.5S_3^{\,2}}{Q_3}+\frac{S_1^{\,2}}{Q_1}+\frac{S_2^{\,2}}{Q_2}+\frac{S_3^{\,2}}{Q_3}\le 105.9654(105.9654-21.6307)(1-\alpha)$$

$$\frac{110}{Q_1}+\frac{22.5}{Q_2}+\frac{44}{Q_3}+0.25Q_1-0.5S_1+\frac{0.25S_1^{\,2}}{Q_1}+0.25Q_2+-0.5S_2+\frac{0.25S_2^{\,2}}{Q_2}+0.5Q_3-S_3+$$
$$\frac{0.5S_3^{\,2}}{Q_3}+\frac{S_1^{\,2}}{Q_1}+\frac{S_2^{\,2}}{Q_2}+\frac{S_3^{\,2}}{Q_3}\le 77.04167(77.04167-21.6307)(1-\alpha)$$

$$Q_1+Q_2+Q_3\le 230(230-25)(1-\alpha)$$
$$Q_1+Q_2+Q_3\le 355(355-25)(1-\alpha)$$
$$2Q_1+3Q_2+3Q_3\le 475(475-65)(1-\alpha)$$
$$2Q_1+3Q_2+3Q_3\le 725(725-65)(1-\alpha)$$
$$Q_1+Q_2+Q_3\le 230-(230-25)(1-\alpha)$$
$$Q_1+Q_2+Q_3\le 355-(355-25)(1-\alpha)$$
$$0.25Q_1+Q_2+2Q_3\le 275$$
$$0.25Q_1+Q_2+2Q_3\le 300$$
$$8Q_1+12Q_2+22Q_3\le 2000$$
$$8Q_1+12Q_2+22Q_3\le 2000$$
$$5\le S_1\le 10,\quad 3\le S_2\le 7,\quad 1\le S_3\le 5$$
$$Q_1\ge 10,\quad Q_2\ge 5,\quad Q_3\ge 10$$

مدل نهایی با استفاده از نرم افزار لینگو حل گردید که جواب آن در جدول شماره ۲ آمده است. با توجه به جدول ۲ میزان α برابر ۱ شده است بدان معنی که تمامی اهداف به اندازه صد در صد محقق شده اند. بعبارت دیگر اهداف کمینه کردن تلرانس راست، حداقل کردن عدد وسط و حداکثر کردن تلرانس چپ در مورد دو هدف کمینه سازی هزینه ها و نیروی انسانی مورد نیاز بطور کامل تحقق یافته است. با توجه به مقادیر بهینه حاصل از حل مدل نهایی و جایگذاری آنها در مدل میزان توابع هدف هزینه و تعداد نیروی انسانی در حالت بهینه که یک عدد فازی مثلثی هستند عبارتست از:

$$TC^* = \widetilde{Z}_1 = (621 \quad 87.35 \quad 117.15)$$

$$TL^* = \widetilde{Z}_2 = (40 \quad 65 \quad 80)$$

جدول ۲: خروجی لینگو

متغیر	مقدار	کاهش در هزینه
α	1.000000	0.000000
Q_1	10.00000	0.000000
Q_2	5.000000	0.000000
Q_3	10.00000	0.000000
S_1	5.000000	0.000000
S_2	3.000000	0.000000
S_3	1.000000	0.000000
منبع	**کمبود/مازاد**	**قیمت سایه ای**
1	1.000000	1.000000
2	326.3730	0.000000
3	326.3730	0.000000
4	124.5494	0.000000
5	301.7757	0.000000
6	47.86667	0.000000
7	76.79040	0.000000
8	205.0000	0.000000
9	330.0000	0.000000
10	410.0000	0.000000
11	660.0000	0.000000
12	205.0000	0.000000
13	330.0000	0.000000
14	272.5000	0.000000
15	247.5000	0.000000
16	2640.000	0.000000
17	1640.000	0.000000
18	5.000000	0.000000
19	4.000000	0.000000
20	4.000000	0.000000
21	0.000000	0.000000
22	0.000000	0.000000
23	0.000000	0.000000
24	0.000000	0.000000
25	0.000000	0.000000
26	0.000000	0.000000
27	1.000000	0.000000
28	0.000000	1.000000

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مطالعه یک مدل موجودی با دو هدف کمینه سازی متوسط هزینه های کل و کمینه سازی تعداد نیروی انسانی مورد نیاز تحت محدودیتهای فضای انبار و میزان سرمایه گذاری، میزان بودجه . مقادیر سفارش دوره ای ارائه گردید که پارامترهای هزینه، تقاضا و منابع محدودیتها بصورت نادقیق و فازی با مفروضات وجود کمبود و زمان تدارک صفر مد نظر قرار گرفت. در حل مدل با استفاده از روش FNLP تابع هدف هزینه فازی از طریق نافازی سازی به سه هدف تبدیل گشته و با احتساب منابع فازی بصورت شش مدل با بسته نرم افزاری لینگو حل شده و در ادامه برای حل مسئله چند هدفه قطعی از روش منطق فازی و توابع اهداف درصد تحقق اهداف محاسبه گردید. برای تحقیقات آتی موارد زیر پیشنهاد می گردد:

بکارگیری مفهوم نرخ تورم در مدلهای چند هدفه کنترل موجودی، در نظر گرفتن تخفیفات خرید و فروش در مدلهای چند هدفه کنترل موجودی، در نظر گرفتن تقاضای پویا در بکارگیری مفهوم نرخ تورم در مدلهای چند هدفه کنترل موجودی، در نظر گرفتن سفارش، کمبود، مقدار تقاضا، محدودیت فازی در محدودیتها و توابع هدف، در نظر گرفتن محدودیتهای دیگری چون هزینه فرصت از دست رفته وتعداد حداکثر سفارش مدلهای چند هدفه کنترل موجودی، استفاده از دیگر تکنیکها برای حل مسئله همچون برنامه ریزی هندسی، برنامه ریزی آرمانی و ....

منابع:

- شوندی، حسن (۱۳۸۵)، "نظریه مجموعه‌های فازی و کاربرد آن در مهندسی صنایع و مدیریت". انتشارات گسترش علوم پایه.چاپ اول.

- Abo el ata, M.O. and K.A.M kot. (1997), "Multi item EOQ inventory model whit varing holding cost under two restrictions: A geometric programming approach", production planning and control, vol 8, No 4, 608-611.
- Chan, W.M., R.N. Ibrahim. (2003), "An EPQ model: Integrating lower pricing, rework and reject situations", production planning of control, Vol 14, No 97, 588-595.
- Georg, J., B.Yuan,(2001), "Fuzzy sets and fuzzy logic theory and applications". Prentic Hall of India.
- Katagiri, H. and H. Ishii. (2002), "Fuzzy inventory problem for perishable commodities", European journal of operation research, No138, 545-553.
- Kumar, S. and A.G. Wami. (2006), "An EOQ model whit fuzzy inflation rate and fuzzy deterioration rate when: a delay in poment is permissible", System science, vol 31, No 5, 323-335.
- Matty, K. (2005), "Numerical approach of multi objective optimal control problem in imprecise environment", Springer Science, No 42, 313-330.
- Yadvalle, V.S.S. (2005), "Multi item deterministic fuzzy inventory model", operation research, Vol 22, No 3, 287-295.
- Zadeh, A.L. (1965), "Fuzzy sets", information and control, NO 38, 335-338.
- Zimmerman, H.J. (1985), "Application of sets theory to mathematical programming", Information science No 16